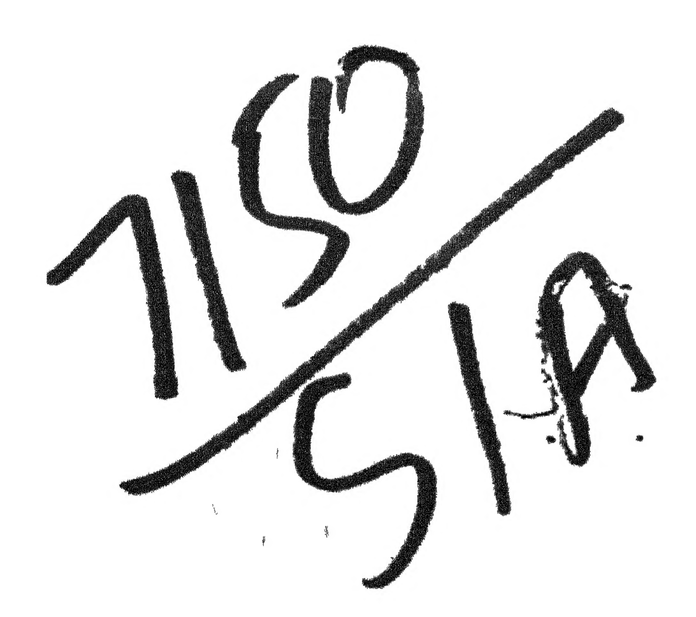
حساب التفاضل والتكامل

ترجمة الفقير محمود بن احمد مدرس العلوم
الفلكية بمدرسة المهندسخانة
الخديوية الكائنة ببولاق
مصر المحمية

*



تيهها على غيرها رداء البهاء * بانشاء ما ابدع من الآثار الحسنة الجميلة * ومآثر
الخلية الجليلة * التي لا تحصر ولا تحصى * ولا تستقرى ولا تستقصى * مع
تجديد مادرس من معالم العلوم والفنون * [illegible] وما خفي من سرها المصون
المكنون * حيث اوجدها احياها باسرها * واحياها بنشر ما دثرها * بعد ان
محيت آثاره مددا مديده * وعفت رسومها ازمنة عديده * حتى ابرزها حلة
الكمال * وأفرغها في قالب الحسن والجمال * فكانت سبيكة ابريز * وما ذلك
على العزيز بعزيز * ولما كان العلم الرياضي من احسن تلك العلوم وابهاها *
وابهج هاتيك الفنون وزهاها * وكنت منذ دخلت هذه المدرسة وانا في
عداد التلامذه * مافتئت اتعلم حتى صرت من الاساتذه * وقمت بوظيفة
التدريس مدة سنين * مستظلا بظل الاحسان ولله [illegible] * تعاملت
مع الطلبة احسن التعامل * وقرأت لهم كتاب الموسيو بوشارلا في حساب
التفاضل والتكامل * وحيث اني لوحظت باعين العنايه * ويسر لي الله سبيل
الهدايه * بادرت الى عبارته الفرنساوية بالترجمة والتعريب * ونظمتها في سلك
براعة التسهيل والتقريب * حيث بسطت بعض العبارات * ووشحتها بزيادة على
ما في الاصل من الاشارات * [illegible] اعلى طرف الثمام للمبتدى * لتتناولها
يد الطالب المبتدى * ونزهتها عن الحشو والحصر * ومثلتها طبعا بمطبعة الحجر
ثم اني ضممت اليها درر فوائد * تعد في سمطها فرائد * يكثر نفعها في علم المكانيك
وغيره * مما يلوح وجه ثمرته وخيره * والحقت بها نبذة في علم [illegible] جليلة
الشان [illegible] وهو حضرة [illegible] بيك صاحب
البراعه * المحرز قصب السبق في ميادين البراعه * ولما [illegible] تلك الترجمة كتابا
عظيما * وصارت بهاتين الضميمتين عقدا نظيما * قدمتها لجناب العالي * ذو الهمم
والمعالي * من هو المفرد الجامع بين المعارف والعوارف * والتالد من المجد
والطارف * العارف بافنان الفنون منطوقا ومفهوما * مدير اللواء ادهم بيك
مدير المدارس عموما * قد شرفها باطلاعه الشريف عليها * واسعدها بنظره
السعيد اليها * صدر امره الكريم بطبعها * ارادة لتكثير ثمرتها ونفعها * حيث

(بسم الله الرحمن الرحيم)

نحمدك يا من على تحصلت بتفاصل [illegible] الانساب * وتكثر منك بتكامل
ما رزقته بغير حساب * ونصلي ونسلم على [illegible] الذى جاء بالدوال القواطع *
والغت لنهاية الكبرى محرته السواطع * هندوس انباء انبياء الامم الخاليه *
ومهندس مجارى بحر الشريعة بالهندسة العاليه * من أقام بما ارشدنا اليه
من اساس معرفتك المحدود * ورسم جيوب ظل كرمك الظليل الممدود * صلى
الله وسلم عليه وعلى آله الواصلين الى طريق النهايات * واصحابه البالغين فى كميات
المعادلات اقصى الغايات * وبعد فيقول الفقير محمود بن احمد مدرس العلوم
الفلكيه * فى مدرسة دار الهندسة الداودية الملكيه * الكائنة ببولاق مصر
المحروسه * صرف الله عنها مكاره الدهر وبؤوسه * ان مكارم الحضرة الآصفية
الخديويه * والدولة المحمدية العلويه * قد تدفق بحر احسانها المديد الكامل
وعم اسيار المصريه بفيضه العميم الشامل * فرد على [illegible]ها ضالتها * واعاد اليها

بهجتها

المعلم تيلور

وبالنظر الى هذا المعنى ليست طريقة الصغيرات جدا الا عبارة عن طريقة مستقربة لايجاد تفاضلات الدوال المتنوعة وبها تنطبع تلك التفاضلات فى الاذهان بواسطة اشكال هندسية فى غاية البساطة والاختصار تظهر للعقل على وجه اوضح من التصورات المطلقة التخيلية وبالجملة فهذه الطريقة تصير ضرورية لابد منها ولاغنى عنها فى الفروع العملية من علم الميكانيك والسلك اذ بدونها يكون حل المسائل العملية من المشكلات الصعبة فى اغلب الاحيان ومن ثم كان افاضل علماء الهندسة يستعملونها كثيرا فى مؤلفاتهم

وقد كان فيما سلف من الزمان لهذه الطريقة ولو فى وجود المكرى محامون قد بذلوا الجهد فى الذب عنها وذلك لما انه اذ التزم الانسان السلوك فيها على مقتضى بعض دعاوى مخصوصة تظهر عليها علامة الصحة والضبط الرياضى التام ويتراءى عليها انها ناتجة بالطبع عن اصل عام وقاعدة كلية ترجع اليها وهذه القاعدة المذكورة لم تزل الى الآن معتبرة من الضروريات لكن لما رأيت اننا اذا اعتبرنا اللانهائى بالوجه المقرر فيها نجد انه ينتج عنها نتائج لا يمكن قبولها استحسنت ان ابرهن عليها بطريقة الصغيرات جدا اصلا آخر ومبنى كذلك على ما علم للناس الفوائد المتعلقة باللانهائى انه اقرب الى الصواب بسبب تصور النهايات التى توجد فيه ضمنا

واذا كانت طريقة النهايات متممة لطريقة الصغيرات جدا بسبب ما يوجد فيها من الخلل فان طريقة المعلم لاجرانجه متممة كذلك لطريقة النهايات وذلك بربط المعاملات التفاضلية بالجبر فقط ولا بأس بجعل هذه الطرائق الاربع كأنها طريقة واحدة ولذلك اذا قابلنا نرى ان الاصول الناتجة عنها مشتركة بين جميعها وان من اراد فهمها كما ينبغى ليس عليه الا ان يضم شيأ قليلا الى طريقة النهايات فقط وتؤول طريقة المعلم لاجرانجه حينئذ الى ان تكون عبارة عن نظرية صارت سهلة جدا حيث غيرت طريقة اثباتها

ولم التزم توضيح النظريات المتنوعة التى تتركب منها هذه الرسالة وانما التزمت

كالشمس في نهار رشدها * وعلم انها قد بلغت اشدها * فدونكها ايها الطالب * يسر الله لي ولك كل مطالب * امين اللهم امين * يارب العالمين

(مقدمه)

قال [illegible] ان من نظر في تاريخ المعارف وجد فيه ان القريحة البشرية تقف وقتا بعد ان ترتقي في اعلى الادراكات والاختراعات كأن مانعا يمنعها من رقيها ثم تعود وترتقي ثانيا بقوة اخرى فتظهر باستكشاف عظيم من المستكشفات التي تتغير بها صورة العلم بالكلية * وان من هذا القبيل ما اخترعه المعلم ديكارته وديكارتوس من تطبيق الجبر على الهندسة فانه افتتح بذلك طريقا كانت مجهولة لاسلافه من العلماء * ومنه ايضا ما اغرب به المعلم نوطون والمعلم ليبنتز على علماء بلاد اوربا من اختراع تحليل اخر اعلى درجة من هندسة المعلم ديكارته اذ لا يتيسر استكشاف اخر يكون به تشريف العقل البشري مثله حيث صار اللانهائي الذي هو مجرد تخيل مستطيعا للحساب ونتجت منه الاعاجيب وقد اراد بعض من الفلاسفة ان يوقعوا التشكك في صحة هذا التحليل العجيب فلم يبلغوا ذلك ولم يتيسر لهم ان ينكروا نتائجه ولم يترتب على [illegible] حث علماء الهندسة على زيادة بذل الجهد في البحث عن حقيقة الوجود الفكري للحسابات الجديدة وكان اول من علم هذا السر هو المعلم نوطون حيث جعل حساب التفاضل طريقة للوصول الى اول نسب الكميات واخرها اعني جعلها طريقة للوصول الى نهايات النسب ثم جاء المعلم دلمبير فرأى ان طريقة المعلم نوطون مشتملة على حقيقة الوجود الفكري لحساب التفاضل ورأى انه يتيسر بواسطة طريقة النهايات ان يحصل التوضيح [illegible] في الطريقة الموجودة عند [illegible] فقطع النظر عن التحرز الذي هو معنى اللانهائي بحساب التفاضل وقد كان فوج من علماء الهندسة قبل المعلم دلمبير [illegible] طريقة النهايات منهم المعلم كوزن خصوصا ولكن لم يحصل الانتفاع التام [illegible] بالكلية من الوجود الفكري لطريقة الصغيرات جدا التي هي عبارة عن اختصار طريقة النهايات الا منذ حصل اثباتها بواسطة نظرية

المعلم

حساب التفاضل

تفاضل الكميات الجبرية

* ١ * حساب التفاضل يبحث فيه عن النتائج التي تنشأ عن الكميات اذا اخذ بعض متغيراتها زيادة ما والمتغير ما صح تغيره في المعادلة كما ان الثابت ما ثبت على حالة غير متغيرة بطول العملية معلوما كان او مجهولا ويقال للمتغير دالة لمتغير اخر متى ساوى الاول كمية حسابية يدخل فيها الثانى بارتباط ايا ما كان فان ص في معادلات

$ص = \sqrt{ح^٢ - س^٢}$ و $ص = س^٣ - ٣ ب س^٢$

و $ص = ح س^٢$ و $ص = ب + ح س^٢$ هى دالة س

* ٢ * ولنعتبر دالة في حالة ازديادها بازدياد المتغير الشاملة هى له فان كل دالة لمتغير س يمكن بيانها براسى منحنى س م م' (شكل ١) وليكن لاجل ذلك $ا ع = س$ و $ع م = ص$ ونفرض ان الافقى اع يأخذ زيادة $ع ع' = هـ$ فالراسى ع م يصير عند ذلك $ع' م' = ص'$ ولاجل ايجاد مقدار هذا الراسى الجديد يشاهد انه يلزم تغيير س بكمية س + هـ في معادلة المنحنى فمقدار ص الذى يستخرج منها يكون هو عين مقدار ص' فاذا كانت معادلة $ص = م س^٢$ مثلا يوجد ص' بتغيير س بكمية س + هـ و ص باخر ص' ويكون $ص' = م س^٢ + ٢ م س هـ + م هـ^٢$

* ٣ * ولنأخذ لاجل معادلة $ص = س^٣$ ...... (١)

ونفرض فيها ان ص تصير ص' حين تغير كمية س بكمية س+هـ فيحدث لنا $ص' = (س + هـ)^٣$ وبحلها يوجد

$ص' = س^٣ + ٣ س^٢ هـ + ٣ س هـ^٢ + هـ^٣$

وبطرح معادلة (١) من هذه المعادلة يوجد

$ص' - ص = ٣ س^٢ هـ + ٣ س هـ^٢ + هـ^٣$ وبقسمتها

توضيح سائر العمليات كما سلكت هذا المسلك فى سائر مؤلفاتى الرياضية لما انى متحقق ان تركها الا يترتب عليه زيادة الاعتقاد فى كثرة معارف المؤلف وان المؤلف انما يعرف مقامه بما يبديه من كيفية الدلالة على تصوراته وبما يقرره من الملحوظات المخترعة فى مؤلفاته

ولنضم الى ماقررناه انه اذا التزم عدم ترك التصورات المتخللة فى صلب النظريات لا يمكن اجتناب التطويل المخل بها الا بواسطة الضبط والتحرير ويزيد الامر اشكالا اذا كان بعض الكتاب معدا للبرهنة على المسائل وابداء اسبابها ومن اطلع على كثرة المواد المتنوعة المقررة فى هذا الكتاب عرف حق المعرفة مايصدر لى من الموانع فى تأليفى له ومن الزيادات التى ضممتها الى هذا الكتاب فى هذه الطبعة الجديدة مسألة النقط الغريبة والنهايات الكبرى والصغرى للدوال ذات المتغيرتين والمنحنيات القطبية ونظرية المتغيرة المستقلة اوالتى ليست بمطلقة والحلول الخصوصية للمعادلات التفاضلية وتكعيب الاجسام المنتهية بالسطوح المنحنية وتربيع السطوح المذكورة وشروط تكامل الدوال ذات الثلاث متغيرات والمعادلات التفاضلية بدرجة ثانية والمعادلات المتماثلة وغير ذلك وبالجملة فقد ختمت هذا المؤلف بنبذة تتعلق بالمعادلات التفاضلية الجزئية مع بعض ملحوظات عمومية على الدوال الاختيارية تتم بها تكاملات تلك المعادلات وبهذا توصلت الى شرح الطريقة التى تتعين بها الدالة الاختيارية التى تدخل فى المعادلة عند توفر معادلات الشرط واعلامها

والطريقة التى بحثت بها عن تلك المسألة المهمة معتبرا السطوح المنحنية تشابه الطريقة التى استعملتها باعتبار الثوابت الاختيارية ولذا بينت بواسطة المنحنيات كيف توجد الثابتة بعينها للتكامل بعد ان حذفت تلك الثابتة عند اخذ التفاضل وهى مسألة يظهر لى انه لم يحظ بها احد قبلى

$$\frac{و ص}{و س} = ٣ س^{٢} \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

كمية $\frac{و ص}{و س}$ [illegible] ٣ س^٢ [illegible]
[illegible] على الدالة المرونة [illegible]

* ٥ واستعمالنا حيث كان $\frac{و ص}{و س}$ هو رمز يدل على كمية
٣ س^٢ التي هي حد [illegible] معادلة (٤) فكان الواجب أن
يبقى و س [illegible] و ص [illegible]
[illegible] (٤) [illegible] و ص = ٣ س^٢ و س
[illegible] ٣ س^٢ و س هي التي تسمى تفاضل الدالة المرسومة ص

٦ * ابحث عن تفاضل دالة ح + ٣ س^٢ بالوجه المشروح
فنضع ص = ح + ٣ س^٢
[illegible] بكمية س + هـ [illegible] بحرف صَ
فيوجد صَ = ح + ٣ س^٢ + ٦ س هـ + ٣ هـ^٢
وبطرح معادلة ص = ح + ٣ س^٢ من [illegible] يوجد
صَ − ص = ٦ س هـ + ٣ هـ^٢ وبقسمة [illegible] على هـ
[illegible] = ٦ س + ٣ هـ [illegible] هـ = ٠ فيوجد
$\frac{و ص}{و س}$ = ٦ س [illegible] تفاضل [illegible] و ص = ٦ س و س

٧ [illegible] ابحث عن تفاضل ص = ح س^٣ − و^٣
[illegible] بكمية س + هـ فيوجد
صَ = ح س^٣ + ٣ ح س^٢ هـ + ٣ ح س هـ^٢ + ح هـ^٣ − و^٣ وأن يكون
صَ − ص = ٣ ح س^٢ هـ + ٣ ح س هـ^٢ + ح هـ^٣ [illegible] فنجد

على هـ يوجد

$$\frac{ص' - ص}{هـ} = ٣\ س^{٢} + ٣\ س هـ + هـ^{٢} \ldots\ldots (٢)$$

وحيث كانت كمية $ص' - ص$ تبين الزيادة التى تأخذها كمية ص حين تزداد كمية س بمقدار هـ يعلم من ذلك ان كمية $\frac{ص' - ص}{هـ}$ هى نسبة الزيادة التى تأخذها الدالة المعروضة ص الى الزيادة التى يأخذها متغير س

واذا نظرنا الى الطرف الثانى من هذه المعادلة فنشاهد أن هذه النسبة تأخذ فى النقصان كلما نقصت كمية هـ وحين تصير كمية هـ صفرا تؤول هذه النسبة الى $٣\ س^{٢}$ ويعلم من ذلك ان حد $٣\ س^{٢}$ هو نهاية النسبة $\frac{ص' - ص}{هـ}$ وهذا الحد هو الذى ينحى نحوه كلما اخذ هـ فى النقص

٤ لكنه بفرض $هـ = ٠$ تؤول كمية $ص' - ص$ الى صفر ايضا فمعادلة (٢) تؤول حينئذ الى هذه

$$\frac{٠}{٠} = ٣\ س^{٢} \ldots\ldots\ldots (٣)$$

ولا استحالة فى هذه المعادلة لانه يفهم من الجبر ان $\frac{٠}{٠}$ قد يكون دالا على سائر انواع الكميات فتارة يستدل به على كمية محدودة وتارة يبين كمية غير محدودة وتارة يكون صفرا ولك ان تقول انه حيث كانت قيمة الكسر لا تتغير بقسمة حديه على عدد واحد ينتج ان تصغير الحدين غير ضار فى مقداره وينبنى على ذلك ان حقيقة الكسر لا تتغير اذا بلغ حداه النهاية فى الصغر يعنى اذا انعدما وكسر $\frac{٠}{٠}$ الذى يوجد فى معادلة (٣) هو عبارة عن رسم حل محل نسبة زيادة الدالة الى زيادة المتغير وحيث لم يبق هذا الرسم اثرا للمتغير المذكور لزم ابداله برمز $\frac{وص}{وس}$ ليعلم به ان الدالة كانت ص والمتغير كان س

و وص و وس يتغير اعتبارهما فى الحقيقة على حسب جنس المسألة فقد يعتبران اصفارا اعدما وقد يعتبران كميات صغيرة جدا ويوجد اذ ذاك

وص

[illegible] = هـ [illegible] يوجد [illegible]

وحيث لم تكن كمية هـ داخلة في الطرف [illegible] من هذه المعادلة [illegible]

يكفي لاجل الانتقال الى النهاية [illegible] وعلى

ذلك يكون [illegible] = ١ ومنه [illegible]

١١ ، وليتأمل اذا في بعض الاوقات [illegible]

وفى هـذه الحالة يلزم استبدال كمية [illegible] بكمية [illegible] هـ [illegible]

كما تقدم

فلايجاد تفاضل [illegible] مثلا حين [illegible]

[illegible] هـ فيوجد

[illegible] = [illegible] ٣ [illegible]

[illegible] = [illegible] ٢ [illegible]

ويوجد بالانتقال الى النهاية [illegible]

[illegible] = ٣ [illegible] وحيث [illegible]

يوجد [illegible] = ٣ [illegible]

[illegible]

[illegible]

١١ [illegible]

[illegible]

[illegible]

بعض [illegible]

[illegible] هـ [illegible]

[illegible] الله [illegible] هـ [illegible]

[illegible]

وَصَ / وَسَ = ٣ ح سَ^٢ وهذا هو المكرر التفاضلي للدالة المفروضة والتفاضل يكون وَصَ = ٣ ح سَ^٢ وَسَ

٨ . لنفرض انه يراد ايجاد تفاضل ص = (١ − سَ^٣) / (١ − سَ)

ولنجري عملية القسمة فيحدث ص = ١ + سَ + سَ^٢

ثم نضع سَ + هـ محل سَ و صَ محل ص فيحدث

صَ = ١ + سَ + هـ + سَ^٢ + ٢ سَ هـ + هـ^٢ وبترتيب هذه بالنسبة

الى هـ يكون صَ = ١ + سَ + سَ^٢ + (١ + ٢سَ) هـ + هـ^٢

ومن هذا يستخرج (صَ − ص) / هـ = ٢سَ + ١ + هـ وفي النهاية يوجد

وَص / وَس = ٢ سَ + ١

وتفاضل الدالة (١ − سَ^٣) / (١ − سَ) يكون حينئذ (٢سَ + ١) وَسَ

٩ * ولنشرح ايضا بهذا المثال

ص = (سَ^٢ − ٢ ح^٢) (سَ^٢ − ٣ ح^٢) ولذلك نحل الطرف الثاني فنجد

ص = سَ^٤ − ٥ ح^٢ سَ^٢ + ٦ ح^٤ ونضع سَ + هـ محل سَ و صَ

محل ص ثم نرتبه بالنسبة الى هـ فيوجد

صَ = سَ^٤ − ٥ ح^٢ سَ^٢ + ٦ ح^٤ + (٤ سَ^٣ − ١٠ ح^٢ سَ) هـ

+ (٦ سَ^٢ − ٥ ح^٢) هـ^٢ + ٤ سَ هـ^٣ + هـ^٤ واذن يكون

(صَ − ص) / هـ = ٤ سَ^٣ − ١٠ ح^٢ سَ + (٦ سَ^٢ − ٥ ح^٢) هـ

+ ٤ سَ هـ^٢ + هـ^٣ وبالارتقاء الى النهاية يوجد

وَص / وَس = ٤ سَ^٣ − ١٠ ح^٢ سَ وبالضرب في وَسَ يظهر أن

التفاضل المطلوب يكون وَص = (٤ سَ^٣ − ١٠ ح^٢ سَ) وَسَ

١٠ * وَسَ هي بنفسها تفاضل كمية سَ لانه اذا

فرض ص = سَ يوجد صَ = سَ + هـ ويكون

صَ

ونفرض انهما يكونان بعد الترتيب بالنسبة الى هـ هكذا

صَ = ص + حـ هـ + ء هـ٢ + ر هـ٣ + ······ الخ (٥)

عَ = ع + حَ هـ + ءَ هـ٢ + رَ هـ٣ + ······ خ (٦)

فبالارتقاء الى النهاية يوجد

وا ص / وا س = حـ و وا ع / وا س = حَ ······ (١)

وبضرب معادلتى (٥) و (٦) فى بعضهما يوجد

عَ صَ = ع ص + ع حـ هـ + ع ء هـ٢ ... الخ

\+ ص حَ هـ + حـ حَ ...

\+ ص ءَ هـ٢ + ... الخ

ثم انه اذا طرح ع ص من كل من الطرفين وقسم ... على هـ يوجد

(عَ صَ − ع ص) / هـ = حـ ع + حَ ص + (ءَ ... حـ حَ ... ص) هـ ... الخ

ولايجاد نهاية النسبة يفرض هـ = ٠ فيحدث

وا ع ص / وا س = حـ ع + حَ ص

(ووضع النقطة فى وا . ع ص يدل على انه يراد اخذ تفاضل ع ص) ثم نضع

فى هذه المعادلة عوضا عن حـ و حَ مقاديرها المبينة بمعادلتى (٧) فيحدث

وا . ع ص / وا س = ع وا ص / وا س + ص وا ع / وا س وبحذف المقام المشترك

يوجد أن وا . ع ص = ع وا ص + ص وا ع

ويفهم من ذلك انه لايجاد تفاضل حاصل ضرب ... يلزم ضرب كل منهما

فى تفاضل الآخر ثم يجمع الحاصل

* ١٥ * وبواسطة هذه الطريقة يوجد ... حاصل ضرب

ثلاثة متغيرات ولذلك يفرض ص ع ر مثلا ويوضع ...

ومن بعد الذى تقدم يوجد

[illegible] .... الخ

[illegible] ع = صـ

[illegible] هـ = ٠ في المعادلة الاخيرة يؤول طرفها الثاني الى [illegible] لان صـ انما صارت صـَ

بسبب تغير [illegible] بكمية سـ + هـ فبانعدام هـ

ترجع صـَ ضرورة [illegible] وهي صـ وينتج من ذلك ان صـ

= ع

١٣ * [illegible] شرح كيفية تعميم طريقة التفاضل [illegible] بكمية سـ + هـ في معادلة صـ = د (سـ)

التي لم يعين فيها [illegible] د (سـ) (بل صرف النظر عن تعيينه [illegible] تعميم) [illegible] يكون مرتبا بحسب الدرجات التصاعدية لكمية هـ [illegible] الناتج

صـَ = [illegible] .... الخ

ثم وضعنا فيه صـ بدلا عن ع المساوية لها كما تقدم برهانه في (١١)

وحدث صـَ = صـ + ع هـ + [illegible] .... الخ أو

صـَ − صـ / هـ = ع + [illegible] .... الخ وفرضنا

هـ = ٠ في النهاية [illegible] د صـ / د سـ = ع

ومن هذا ينتج ان المكرر التفاضلي يساوي مكرر الحد المحتوي على كمية هـ بدرجة اولى في حل د (سـ + هـ) المرتب بحسب الدرجات التصاعدية لكمية هـ

* (تفاضل حاصل ضرب متغيرين) *

* ١٤ * لايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين [illegible] تختص بمتغير واحد سـ ونرمز لهما بحرفي صـ و ع ثم نغير كل منهما بتغير سـ بكمية سـ + هـ ونرمز للنواتج بحرفي صـَ و عَ

ونفرض

واذا وضعنا فى الطرف الثانى عوضا عن ع مساويها $\frac{س}{ص}$ يوجد

صـ و/ع = و/س ـــ $\frac{س}{ص}$ و/صـ وباشتراك المقام يكون

صـ و/ع = $\frac{صـ و/س ـــ س و/صـ}{صـ}$ واخيرا و/ع = $\frac{صـ و/س ـــ س و/صـ}{صـ^٢}$

أو و. $\frac{س}{صـ}$ = $\frac{صـ و/س ـــ س و/صـ}{صـ^٢}$

(فى تفاضل المتغير ذى الاس)

* ٢٠ * حيث انه بقسمة جميع حدود معادلة

و. صـ ع ر = صـ ع و/ر + صـ ر و/ع + ع ر و/صـ المبينة فى (بند ١٥)

على صـ ع ر يحدث $\frac{و. صـ ع ر}{صـ ع ر} = \frac{و/ر}{ر} + \frac{و/ع}{ع} + \frac{و/صـ}{صـ}$

وعلى العموم اذا فرضنا مضاريب متغيرة بعدة م واخذنا تفاضل حاصل ضربها وقسمناه على هذا الحاصل يكون

$\frac{و. س صـ ع ر ط ... الخ}{س صـ ع ر ط ... الخ} = \frac{و/س}{س} + \frac{و/صـ}{صـ} + \frac{و/ر}{ر}$ ... الخ (٩)

واذا فرض ان س = صـ = ع = ر = ط = الخ فمعادلة (٩) تصير

$\frac{و. س^م}{س^م} = \frac{و/س}{س} + \frac{و/س}{س} + \frac{و/س}{س} + \frac{و/س}{س} + ...$ بعدد م

اى $\frac{و. س^م}{س^م} = \frac{م و/س}{س}$ وبضرب كل من الطرفين فى $س^م$

يوجد و/$س^م$ = $\frac{م س^م و/س}{س}$ = م $س^{م-١}$ و/س

* ٢١ * يعلم من ذلك ان تفاضل متغير ذى الاس يساوى اسه مضروبا فيه باسه الاصلى لا الواحد والحاصل مضروب فى و/س

(برهان آخر)

حيث ان $س^م$ = س × س × س × س × س .... بعدد م

و٠صـ ل = صـ و ل + ل و صـ .... (٨)

وحيث كان ل = ع ر فبأخذ تفاضله بحكم المقرر يكون

و ل = ع و ر + ر و ع

وإذا وضعنا في معادلة (٨) عوضا عن ل و و ل المقادير الاخيرة يوجد أن و٠ صـ ع ر = صـ ع و ر + صـ ر و ع + ع ر و صـ ويشاهد حينئذ أن الطريقة المتقدمة تجرى ايضا على تفاضل حاصل ضرب ثلاث متغيرات يعني انه لايجاد هذا التفاضل يكتب حاصل ضرب صـ ع ر ويغير فيه كل متغير بتفاضله على التوالي وحاصل جمع الحواصل الحادثة يكون هو التفاضل المطلوب

* ١٦ * وهذه قاعدة عامة لايجاد تفاضل حاصل ضرب اى عدد كان من المتغيرات

* ١٧ * حيث ان تفاضل كمية ح س هو ح و س يعلم من ذلك انه متى توجد كمية ثابتة في حاصل ضرب ينبغي ان يؤخذ تفاضل حاصل الضرب بصرف النظر عن المضروب الثابت ثم بعد أخذ التفاضل يضرب الناتج في الكمية الثابتة ومن ثمة كان تفاضل كمية ح س صـ مثلا

ح س و صـ + ح صـ و س

* ١٨ * والكمية الثابتة ليس لها تفاضل لانه اذا فرض صـ = ح س + ب ثم اجريت عملية (بند ٧) ظهر أن و صـ = ح و س وهذا الناتج هو عين الناتج الذي ينتج اذا لم يكن للثابتة ب وجود

*(في تفاضل الكسر)

* ١٩ * تفاضل كسر $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ يساوى $\frac{\text{ص و س} - \text{س و ص}}{\text{ص}^{٢}}$

ولاثبات ذلك نفرض ان $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ع ثم نحذف المقام فيوجد

س = صـ ع وبموجب (بند ١٤) يكون و س = صـ و ع + ع و صـ ويستخرج من ذلك صـ و ع = و س − ع و صـ

واذا

وَصه = س^م وَ ا ــ ا وَ س / س^٢

وبسبب كون س كمية مقصر توزن هذه المعادلة

وصه = ــ وس / س^٢ ثم يعدل تفاضل شرط بقاعدة (بند ٢١)

فيكون وَصه = ــ م / س^{م+١} وَس ولاجل عمل قسمة يلزم ان

يطرح اس كمية س التي في المقسوم عليه من كمية س التي

في المقسوم فيوجد وَصه = ــ م س^{ــ م ــ ١} وَس او

وَصه = ــ م س^{ــ م ــ ١} وس وهو موافق لقاعدة (بند ٢١)

وبه يتم المراد

*(تفاضل المتغير ذى الكسور)

* ٢٣ * لايجاد تفاضل متغير جذرى نحول هذا المتغير الى اس كسرى ونجرى عليه قاعدة (بند ٢١) ولايجاد تفاضل كمية

√س مثلا نحولها الى س^{١/٢} وتفاضل هذه يكون

½ س^{ــ ½} وَس = وس / ٢√س

ويعلم من ذلك ان تفاضل جذر تربيعي لكمية متغيرة يلزم قسمة تفاضل هذه الكمية على ضعف الجذر

(تنبيه) حيث انه بفرض م = ١ في معادلة

و· س^م = م س^{م ــ ١} وَس المبينة في (بند ٢٢) يوجد

و· س^{١/ن} = ١/ن · س^{١/ن ــ ١} وس وذلك عبارة عن

ومن بعد (بند ١٦) يوجد $د\, س^م = س^{م-١} د س$
$- س^{م-١} د س + س^{م-١} د س + \cdots$ بعدد م فيكون
$د\, س^م = م\, س^{م-١} د س$

* ٢٢ * وهذا البرهان يصدق ايضا على المتغير الذي يكون اسه كسرا ومثال البرهنة على ذلك نأخذ اولا $س^{\frac{م}{ن}}$ ونضع $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ثم نرفع كلا من الطرفين الى ن فيكون $ص^ن = س^م$ ونأخذ تفاضل كل من الطرفين (بند ٢١) نجد $ن\, ص^{ن-١} د ص = م\, س^{م-١} د س$
وينتج من ذلك $د ص = \frac{م}{ن} \frac{س^{م-١}}{ص^{ن-١}} د س$

واذا استعملنا هذه المعادلة عوضا عن $س^{م-١}$ و $ص^{ن-١}$ كميتي $\frac{س^م}{س}$ و $\frac{ص^ن}{ص}$
يكون $د ص = \frac{م}{ن} \frac{\frac{س^م}{س}}{\frac{ص^ن}{ص}} د س$ ومنه $د ص = \frac{م}{ن} \frac{س^م ص}{س\, ص^ن} د س$

وحيث ان $س^م = ص^ن$ تتحول المعادلة السابقة الى
$د ص = \frac{م}{ن} \frac{ص}{س} د س$ وبوضع مقدار ص بدلا عنه يوجد
$د\, س^{\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن} \frac{س^{\frac{م}{ن}}}{س} د س$ او $د\, س^{\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن} \times س^{\frac{م}{ن}-١} د س$

وهذا ما أردناه ولاجل اثبات الحالة التي يكون فيها الأس سلبيا نفرض
$ص = س^{-م}$ وذلك يؤول الى $ص = \frac{١}{س^م}$ ثم نأخذ التفاضل بقاعدة
الكسور بناء على (بند ١١) نجد

د

[illegible] ...... (١٠)

[illegible]

وبضرب [illegible]

[illegible]

وحيث [illegible]

وبنبى على ذلك ان [illegible]

[illegible] وبوضع [illegible] تؤول المعادلة المذكورة الى

[illegible] (١١)

وحيث تنعدم هـ تنعدم ك [illegible] زدت [illegible]

وصارت [illegible] كلما ازددت [illegible] كمية هـ وصارت [illegible]

فبناء على ذلك تؤول معادلة (١١) في النهاية [illegible] هـ = ٠

الى $\frac{وص}{وس} = ل_١ \times ل$ (١٢)

ولتعيين كميتي $ل_١$ و $ل$ ينبغي ان يفرض ان هـ = ٠ و [illegible] = ٠

في معادلتي (١٠) فيحدث من ذلك

[illegible]

ثم بوضع [illegible] عن $ل$ و $ل_١$ في معادلة (١٢)

فيوجد ان $\frac{وص}{وس} = \frac{وص}{وع} \times \frac{وع}{وس}$ (١٣)

وهذا الناتج يبين انه لايجاد [illegible] $\frac{وص}{وس}$ تفاضل [illegible]

$$و \cdot \sqrt[ن]{س} = و\, س^{\frac{1}{ن}} = \frac{1}{ن}\, س^{\frac{1-ن}{ن}}\, وس = \frac{وس}{ن\, س^{\frac{ن-1}{ن}}} = \frac{وس}{ن \sqrt[ن]{س^{ن-1}}}$$

يعلم من ذلك ان تفاضل المتغير المجذور الى درجة ما يساوى تفاضل المتغير مقسوما على درجة الجذر مضروبا فى الجذر بدرجته الاصلية لكن تكون الكمية الموضوعة تحت الجذر مرفوعة الى درجة الجذر ناقصة واحدا

* ٢٤ * قد تكون الدالة ص والمتغير س غير مبينين بمعادلة واحدة كما فى $ص = دع$ و $ع = دس$ مثلا

والطريقة الاولى التى تتصور لايجاد المكرر التفاضلى $\frac{وص}{وس}$ تكون بحذف ع من بين هاتين المعادلتين حتى يمكن تطبيق قاعدة التفاضل واجراؤها عليها الا انه يمكن ايجاد المكرر التفاضلى $\frac{وص}{وس}$ من اول وهلة بدون احتياج الى هذه العملية الاولية ولنشرع فى ذلك فنقول نفرض انه بتغيير س بكمية $س + هـ$ فى معادلة $ع = دس$ تتغير ع بكمية $ع + ك$ ثم انه اذا وضعت $ع + ك$ محل ع فى معادلة $ص = دع$ تصير الدالة ص متغيرة بكمية $صَ$ ويكون اذن

$$عَ = د(س+هـ) \quad و \quad صَ = د(ع+ك)$$

ثم بعد ذلك يحلل الطرفان الاخيران لهاتين المعادلتين ويفرض ان النواتج تكون مرتبة حسب القوى التصاعدية فيحصل من ذلك

$$عَ = ع + ل\,هـ + لَ\,هـ^{2} + لً\,هـ^{3} + \cdots \text{ الخ}$$

$$صَ = ص + ل_{1}\,ك + لَ_{1}\,ك^{2} + لً_{1}\,ك^{3} + \cdots \text{ الخ}$$

ويوجد من بعد تحويل كميتى ع و ص فى الاطراف الاول وقسمة
[illegible] على هـ و ك ان

وبضرب هذين المكررين التفاضليين في بعضهما يوجد

$$\frac{وَصـ}{وَسـ} = -سـ (حـ - سـ)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-سـ}{\sqrt{حـ - سـ}}$$ ومنه يكون

$$وَصـ = \frac{-سـ وَسـ}{\sqrt{حـ - سـ}}$$

ويمكن ايضا صـ $= (حـ + دسـ^{م})^{ن}$ فلاجل يجد تفاضل نجعل

$حـ + دسـ^{م} = ع$ فيحدث من ذلك معادلتا

صـ $= ع^{ن}$ و $ع = حـ + دسـ^{م}$ ومنه نجد

$$\frac{وَصـ}{وَع} = نع^{ن-1} = ن(حـ + دسـ^{م})^{ن-1} \text{ و } \frac{وَع}{وَسـ} = م د سـ^{م-1}$$

وبضرب هذين المكررين التفاضليين في بعضهما يوجد

$$\frac{وَصـ}{وَسـ} = م ن د سـ^{م-1} (حـ + دسـ^{م})^{ن-1}$$ وتفاضل المطلوب يكون

$$وَصـ = م ن د سـ^{م-1} (حـ + دسـ^{م})^{ن-1} وَسـ$$

* ٢٧ * ولنمثل بمثال ثالث فنفرض صـ $= (حـ + \sqrt{د - \frac{هـ}{سـ^{٢}}})^{٤}$

ثم نضع $د - \frac{هـ}{سـ^{٢}} = ع$ ......(١٤) فيكون

صـ $= (حـ + \sqrt{ع})^{٤}$ ......(١٥)

وبأخذ تفاضل معادلة (١٤) يحدث $وَع = \frac{٢هـ سـ وَسـ}{سـ^{٤}}$

ومنه $\frac{وَع}{وَسـ} = \frac{٢هـ}{سـ^{٣}}$ ويحدث ايضا من معادلة (١٥)

$$وَصـ = ٤(حـ + \sqrt{ع})^{٣} وَ(حـ + \sqrt{ع}) = ٤(حـ + \sqrt{ع})^{٣} \frac{وَع}{٢\sqrt{ع}}$$

وباستبدال ع بمقدارها في المعادلة الاخيرة لنا

الصورة

$$ص = د ع \quad و \quad ع = ى س$$

يكفى ان تستخرج المكررات $\frac{و ص}{و ع}$ و $\frac{و ع}{و س}$ التفاضلية من هاتين المعادلتين ثم تضرب النواتج فى بعضها وحاصل الضرب الحادث يكون هو مكرر $\frac{و ص}{و س}$ التفاضلى المطلوب

* ٢٥ * فاذا فرضنا مثلا ان $ص = ٣ ع^٢$ و $ع = س^٣ + ح س^٢$

فيحدث من ذلك $\frac{و ص}{و س} = ٦ ع$ و $\frac{و ع}{و س} = ٣ س^٢ + ٢ ح س$

وبضرب هذين المكررين فى بعضهما يكون

$$\frac{و ص}{و س} = ٦ ع (٣ س^٢ + ٢ ح س) = ٦ (س^٣ + ح س^٢)(٣ س^٢ + ٢ ح س)$$

* ٢٦ * قانون (١٣) يستعمل بكثرة فى أخذ تفاضل الكميات العسرة ولنمثل ببعض منها فنقول

نبحث عن ايجاد تفاضل $ص = \sqrt{ح^٢ - س^٢}$ فذلك يؤول الى ايجاد المكرر التفاضلى $\frac{و ص}{و س}$ ولذا نضع $ح^٢ - س^٢ = ع$ فيكون بناء عليه

$$ص = \sqrt{ع} = ع^{\frac{1}{٢}}$$

ومعادلتا $ص = د ع$ و $ع = ى س$ (بند ٢٤) تؤولان حينئذ الى $ص = ع^{\frac{1}{٢}}$ و $ع = ح^٢ - س^٢$

فبأخذ تفاضل كل من طرفيهما (بند ٢١) يوجد

$$\frac{و ص}{و ع} = \frac{1}{٢} ع^{-\frac{1}{٢}} = \frac{1}{٢} (ح^٢ - س^٢)^{-\frac{1}{٢}} \quad و \quad \frac{و ع}{و س} = - ٢ س$$

وبضرب

لاننا اثبتنا فيما مر ان الكميات [illegible] تفاضل [illegible]

م س + ث س − ح² و م س − ث س³ − ك − ح و

في التفاضل اذ تفاضل كل منهما م ث ءس − ٣ [illegible] س² ءس

(في التفاضلات المتوالية)

٣٠ * التفاضلات المتوالية [illegible]

هذه الدالة وتفاضل [illegible]

حتى ينتهي الى مقدار ثابت [illegible] ص [illegible] متغير

س مثلا ثم اخذنا تفاضل هذه الدالة وكان هذا التفاضل ع ءس ثم اخذ

تفاضل كمية ع اذ اشتملت على متغير س [illegible] تفاضل

ع' ءس [illegible] كمية ع' [illegible] متغير س

فان التفاضل الحادث ع'' ءس [illegible]

مشتمل على متغير س فكميات ع ءس و ع' ءس و ع'' ءس الخ

هي التي تسمى التفاضلات المتوالية لدالة س [illegible]

الاول والثاني يسمى التفاضل الثاني وهكذا الخ

فاذا فرضنا ان ص = ح س³ فانه يحدث

ءص = ٣ح س² ءس

وهذا هو التفاضل الاول لكمية ص

واذا وضعنا ع = ٣ح س² واخذنا تفاضلها

ءع = ٦ح س ءس وهذا هو التفاضل الثاني

واذا وضعنا ايضا ع' = ٦ح س واخذنا تفاضلها يحدث

ءع' = ٦ح ءس وهذا هو التفاضل الثالث

وقد انتهت التفاضلات المتوالية في هذا المثال الى هنا لان تفاضل كمية ٦ح

الثابتة صفر

والمكررات التفاضلية التي هي ع و ع' و ع'' .... الخ

للتفاضلات المتوالية تسمى المكررات التفاضلية المتوالية وينبغي ان [illegible]

$$\frac{وَصـ}{وَع} = \frac{٢(ح+\sqrt{ى - \frac{هـ}{سـ^٢}})^٣}{\sqrt{ى - \frac{هـ}{سـ^٢}}}$$ ثم يحدث بضرب هذين المكررين

في بعضهما $$\frac{وَصـ}{وَسـ} = \frac{٢هـ}{سـ^٤} \cdot \frac{(ح+\sqrt{ى - \frac{هـ}{سـ^٢}})^٣}{\sqrt{ى - \frac{هـ}{سـ^٢}}}$$

واذا حريت عملية على هذا المثال $صـ = (ح + \sqrt{سـ})^٣$

يوجد $$\frac{وَصـ}{وَسـ} = \frac{٣(ح+\sqrt{سـ})^٢}{٢\sqrt{سـ}}$$

* ٢٨ * ثبت الآن أن تفاضل حاصل جمع جملة دوال لمتغير واحد يساوي دائما حاصل جمع تفاضلات هذه الدوال ولو أن ماتقدم يجعل ذلك [illegible] الايضاح ولذا نفرض $صـ = ىسـ + دسـ + ىسـ$ [illegible] هذه الدوال متغير سـ بكمية سـ + هـ ونفرض انه يوجد $صـَ = ى سـ + ح هـ + حَ هـ^٢ + \cdots$ الخ $+ دسـ + و هـ + وَ هـ^٢$ $\cdots$ الخ $+ ى سـ + ر هـ + رَ هـ^٢ + \cdots$ الخ

وبطرح المعادلة المفروضة من هذه المعادلة طرفا بطرف يحدث

$صـَ - صـ = (ح + و + ر)هـ + (حَ + وَ + رَ)هـ^٢ + \cdots$ الخ

وبأخذ النهاية نجد أن $\frac{وَصـ}{وَسـ} = ح + و + ر$

و $وَصـ = ح وَسـ + و وَسـ + ر وَسـ$

وحيث كانت كميات ح و و و ر هي الحدود المضروبة في القوة الاولى [illegible] هـ في حاول $ى (سـ + هـ)$ و $د (سـ + هـ)$ و $ى (سـ + هـ)$ ينتج من ذلك أن $ح وَسـ$ و $و وَسـ$ و $ر وَسـ$ تبين حاصل جمع تفاضلات الدوال المفروضة وهذا ما اردنا اثباته

* ٢٩ * ولنختم ماسبق بالتنبيه الآتي وذلك ان تفاضلات الدوال التي لاتخالف بعضها الا في كميات ثابتة كلها متحدة وهذه القضية بينة واضحة

لاننا

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}} = ٢\,\text{و} + ٢ \times ٣\,\text{ر س} + ٣ \times ٤\,\text{ح س}^{٢} \ldots \text{الخ}$$

$$\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و س}^{٣}} = ٢ \times ٣\,\text{ر} + ٢ \times ٣ \times ٤\,\text{ح س} \ldots \text{الخ}$$

وإذا رمزنا برمز (ص) لما تؤول اليه ص حين يفرض فيها س = ٠ وبرمز $\left(\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}\right)$ لما تؤول اليه كمية $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ حين يفرض فيها س = ٠ وبرمز $\left(\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}\right)$ لما تؤول اليه كمية $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}$ حين يفرض فيها س = ٠ وهكذا

فالمعادلات السابقة تؤول الى $(\text{ص}) = \text{ح}$ و $\left(\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}\right) = \text{د}$

و $\left(\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}\right) = ٢\,\text{و}$ و $\left(\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و س}^{٣}}\right) = ٢ \times ٣\,\text{ر}$

ومنها يستخرج

$$\text{ح} = (\text{ص}) \quad \text{و} \quad \text{د} = \left(\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}\right) \quad \text{و} \quad \text{و} = \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}\right)$$

$$\text{و} \quad \text{ر} = \frac{١}{٢ \times ٣}\left(\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و س}^{٣}}\right)$$

واذا وضعنا هذه المقادير في معادلة (١٦) فتؤول الى

$$\text{ص} = (\text{ص}) + \left(\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}\right)\text{س} + \left(\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}\right)\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$$

$$+ \frac{١}{٢ \times ٣}\left(\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و س}^{٣}}\right)\text{س}^{٣} + \text{الخ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١٧)$$

وهذا هو قانون مكلورين ودستوره

حدثت هذه المكررات باخذ التفاضلات المتوالية لكمية وَصـ باعتبار كمية وَسـ فيها ثابتة وبيان ذلك ان نقول حيث ان وَصـ = ح وَسـ وباخذ تفاضل كل من الطرفين باعتبار وَسـ ثابت يوجد

وَ٢صـ = وَ . ح × وَسـ وكان وَح = حَ وَسـ فيوجد

وَ٢صـ = حَ وَسـ × وَسـ = حَ وَسـ٢ ومنه يستخرج

$\frac{\text{وَ٢صـ}}{\text{وَسـ٢}}$ = حَ وكذا باخذ تفاضل طرفى معادلة وَ٢صـ = حَ × وَسـ٢ باعتبار وَسـ ثابتة يوجد وَ٣صـ = وَحَ × وَسـ٢ وبسبب مساواة كمية وَحَ الى حً وَسـ يكون

وَ٣صـ = حً وَسـ × وَسـ٢ = حً وَسـ٣ ومنه يحدث

$\frac{\text{وَ٣صـ}}{\text{وَسـ٣}}$ = حً وهلم جرا

(تنبيه) رموز وَ٢صـ و وَ٣صـ الخ تدل على التفاضل الثانى والثالث الخ لكمية صـ وذلك عبارة عن تفاضل التفاضل وتفاضل تفاضل التفاضل الخ

وما وَسـ٢ و وَسـ٣ ...... الخ فتدل على تربيع او تكعيب الخ كمية وَسـ

(فى نظرية مكلوران)

* ٣١ * لتكن صـ دالة لمتغير سـ فاذا رتبنا هذه الدالة بالنسبة للقوى التصاعدية لهذا المتغير وكان الناتج

صـ = ح + دسـ + وسـ٢ + رسـ٣ + ع سـ٤ + الخ (١٦)

ثم أخذنا التفاضلات المتوالية لهذه الدالة وجدنا بعد القسمة على وَسـ

$\frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}}$ = د + ٢وسـ + ٣رسـ٢ + ٤ع سـ٣ + .. الخ

$$\frac{و ص}{و س} = \frac{1}{2}(ح^2 + ى س)^{-\frac{1}{2}} ى = \frac{1}{2} \frac{ى}{\sqrt{ح^2 + ى س}}$$

$$\frac{و^2 ص}{و س^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(ح^2 + ى س)^{-\frac{3}{2}} ى^2 = -\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} ى^2}{\sqrt{(ح^2 + ى س)^3}}$$

$$\frac{و^3 ص}{و س^3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}(ح^2 + ى س)^{-\frac{5}{2}} ى^3 = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} ى^3}{\sqrt{(ح^2 + ى س)^5}}$$

واذا فرضنا ان $س = ٠$ تؤول هذه المقادير الى $ص = (ح^2)^{\frac{1}{2}} = ح$

و $\left(\frac{و ص}{و س}\right) = \frac{1}{2} \frac{ى}{ح}$ ، و $\left(\frac{و^2 ص}{و س^2}\right) = -\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} ى^2}{ح^3}$

و $\frac{و^3 ص}{و س^3} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} ى^3}{ح^5}$ وبوضعها فى قانون (١٧) يؤول هذا القانون الى

$$\sqrt{ح^2 + ى س} = ح + \frac{ى س}{2 ح} - \frac{ى^2 س^2}{8 ح^3} + \frac{ى^3 س^3}{16 ح^5} - \text{الخ}$$

(المثال الثالث)

* ٣٤ * ولنأخذ $ص = (ح + س)^م$ مثالا ثالثا فنجد باجراء التفاضل

$$\frac{و ص}{و س} = م (ح + س)^{م - 1}$$

$$\frac{و^2 ص}{و س^2} = م (م - 1) (ح + س)^{م - 2}$$

$$\frac{و^3 ص}{و س^3} = م (م - 1) (م - 2) (ح + س)^{م - 3}$$

(المثال الاول)

* ٣٢ * لحل كمية $\frac{1}{\text{ح}+\text{س}}$ بواسطة قانون مكلوران نضع $\text{ص}=\frac{1}{\text{ح}+\text{س}}$ فنجد باخذ تفاضل الطرفين

$$\text{وص}=\frac{(\text{ح}+\text{س})\,\text{و}1-1\times\text{و}(\text{ح}+\text{س})}{(\text{ح}+\text{س})^{2}}=-\frac{\text{وس}}{(\text{ح}+\text{س})^{2}}$$

وبقسمة الطرفين على وس يوجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}}=-\frac{1}{(\text{ح}+\text{س})^{2}}$$

وباخذ التفاضل ثانيا وثالثا الخ يحدث من بعد القسمة على وس

$$\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}=\frac{2(\text{ح}+\text{س})}{(\text{ح}+\text{س})^{4}}=\frac{2}{(\text{ح}+\text{س})^{3}}$$

$$\text{و}\quad\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{وس}^{3}}=-\frac{2\times3(\text{ح}+\text{س})^{2}}{(\text{ح}+\text{س})^{6}}=-\frac{2\times3}{(\text{ح}+\text{س})^{4}}$$

ثم نفرض $\text{س}=0$ فى مقادير ص و $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ و $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}$ الخ

$$\text{فيحدث}\ (\text{ص})=\frac{1}{\text{ح}}\ \text{و}\ \left(\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\right)=-\frac{1}{\text{ح}^{2}}\ \text{و}\ \left(\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}\right)=\frac{2}{\text{ح}^{3}}$$

$$\text{و}\ \left(\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{وس}^{3}}\right)=-\frac{2\times3}{\text{ح}^{4}}\ \text{الخ}$$

ثم نضع هذه المقادير ومقدار ص الحادث بفرض $\text{س}=0$ ايضا فى قانون (١٧) فيحدث لنا

$$\frac{1}{\text{ح}+\text{س}}=\frac{1}{\text{ح}}-\frac{\text{س}}{\text{ح}^{2}}+\frac{\text{س}^{2}}{\text{ح}^{3}}-\frac{\text{س}^{3}}{\text{ح}^{4}}+\text{الخ}$$

(المثال الثانى)

* ٣٣ * $\text{ص}=\sqrt{\text{ح}^{2}+\text{ءس}}$ فنضع $\text{ص}=(\text{ح}^{2}+\text{ءس})^{\frac{1}{2}}$ ونجد

و

وترتب هذه بالنسبة الى ه لكن بدون اجراء العملية لاننا لم نحتج الا للحدود المضروبة فى اول قوى ه وبالتأمل يظهر انه اذا فرض حاصل بهذه الصورة ه (ه ـــ ١) (ه ـــ ٢) (ه ـــ ٣) الخ بحيث يكون احد جزئيه (ه ـــ ١) (ه ـــ ٢) (ه ـــ ٣) الخ يتركب من مضاريب عددها ن فحل هذا الجزء من بعد نظر المعادلات يكون هكذا

$$ه^{ن} + ا ه^{ن-١} + ب ه^{ن-٢} + \cdots + م ه + ا_{ن}$$

وحد $ا_{ن}$ يكون مركبا من حاصل ضرب الاجزاء الثانية ـــ ١ و ـــ ٢ و ـــ ٣ الخ لذوات الحدين ه ـــ ١ و ه ـــ ٢ و ه ـــ ٣ الخ ويكون لا محالة

$$ه(ه-١)(ه-٢)(ه-٣)\text{الخ} = ه(ه^{ن} + ا ه^{ن-١} \cdots + م ه + ا_{ن})$$

ومن البين ان الحد المشتمل على ه بدرجة اولى فى هذا الحاصل هو $ا_{ن}$ ه او (ـــ ١ × ـــ ٢ × ـــ ٣ و الخ) ه بحكم ما تقرر ويؤخذ منه انه لايجاد الحدود المتبوعة بأول قوى ه فى الحدود الصعبة فى حل (١٨) وهى من الحد الثالث فصاعدا تشكل مكررات ه المختلفة بالوجه الآتى وهو أن مكرر ه يتركب من حاصل ضرب الاعداد المجردة عن ه فى $\frac{د^{٢}}{١ \times ٢}$ للحد الثالث وفى $\frac{د^{٣}}{٣}$ للحد الرابع وهلم جرا وينبنى على ذلك ان $ح^{ه} = ١ + (د - \frac{د^{٢}}{٢} + \frac{د^{٣}}{٣} - \text{الخ})\, ه +$ الحدود المحتوية على $ه^{٢}$ و $ه^{٣}$ الخ

واذا رمزنا بحرف ع لكمية $(د - \frac{د^{٢}}{٢} + \frac{د^{٣}}{٣} - \frac{د^{٤}}{٤} + \text{الخ})$ يحدث لنا

$$ح^{ه} = ١ + ع ه + \text{الحدود المحتوية على } ه^{٢} \text{ و } ه^{٣} \text{ و } ه^{٤} \text{ الخ}$$

واذا وضعنا هذا المقدار فى معادلة $ص = ح^{س} ح^{ه}$ الت هذه المعادلة

ونجعل س = ٠ يؤول مقدار ص الى $\text{ح}^{\text{م}}$ يعني انه يوجد (ص) = $\text{ح}^{\text{م}}$

وتؤول المكررات التفاضلية $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ و $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}$ الخ الى

$$\left(\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\right) = \text{م}\,\text{ح}^{\text{م}-1} \quad \text{،} \quad \left(\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}\right) = \text{م}(\text{م}-1)\,\text{ح}^{\text{م}-2}$$

و $\left(\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{وس}^{3}}\right) = \text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)\,\text{ح}^{\text{م}-3}$ ونوضع هذه المقادير في

قانون (١٧) فيوجد

$$(\text{ح}+\text{س})^{\text{م}} = \text{ح}^{\text{م}} + \text{م}\,\text{ح}^{\text{م}-1}\text{س} + \text{م}\frac{\text{م}-1}{2}\,\text{ح}^{\text{م}-2}\text{س}^{2}$$

$$+\,\text{م}\frac{\text{م}-1}{2}\cdot\frac{\text{م}-2}{3}\,\text{ح}^{\text{م}-3}\text{س}^{3} + \text{الخ}$$

(في تفاضل الكميات العالية)

٣٥ * الكمية العالية هي التي تكون مرفوعة بأس متغير ولوغاريتم وجيب وجيب تمام وما اشبه ذلك

٣٦ * ولنفرض اولا ان المراد ايجاد تفاضل هذه الكمية $\text{ح}^{\text{س}}$

ولذلك نضع ص = $\text{ح}^{\text{س}}$ ثم نغير كمية س بكمية س + ه فتتغير كمية ص بكمية ص′ وتؤول هذه المعادلة الى

$$\text{ص}' = \text{ح}^{\text{س}+\text{ه}} \quad \text{أو} \quad \text{ص}' = \text{ح}^{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{ه}}$$

ثم نحل كمية $\text{ح}^{\text{ه}}$ بالنسبة لقوى ه ولا يتيسر ذلك بقانون الكمية ذات الحدين الا بجعل ح = ١ + د ومن ثم يكون

$$\text{ح}^{\text{ه}} = (1+\text{د})^{\text{ه}} = 1 + \text{ه}\frac{\text{د}}{1} + \text{ه}(\text{ه}-1)\frac{\text{د}^{2}}{1\times2}$$

$$+\,\text{ه}(\text{ه}-1)(\text{ه}-2)\frac{\text{د}^{3}}{1\times2\times3} + \text{الخ} \cdots (18)$$

وترتب

وبجعل $\text{س} = 0$ يوجد

$$(\text{ص}) = \text{ا}^{0} = 1$$

$$\left(\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}\right) = \text{ح}$$

$$\left(\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}^{2}}\right) = \text{ح}^{2}$$

$$\left(\frac{\text{و}^{3}\text{ص}}{\text{و س}^{3}}\right) = \text{ح}^{3} \cdots\cdots \text{الخ}$$

وبوضع هذه المقادير في قانون (١٧) يوجد

$$\text{ا}^{\text{س}} = 1 + \frac{\text{ح س}}{1} + \frac{\text{ح}^{2}\text{س}^{2}}{1.2} + \frac{\text{ح}^{3}\text{س}^{3}}{1.2.3} + \cdots\cdots \text{الخ}$$

وحيث انه بأخذ متغير س اى مقدار كان لا يتغير مقدار ح الثابت فيمكننا ان نضع $\text{س} = \frac{1}{\text{ح}}$ وتؤول المعادلة الاخيرة حينئذ الى

$$\text{ا}^{\frac{1}{\text{ح}}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots\cdots\cdots \text{الخ}$$

ثم نرمز للطرف الثاني من هذه المعادلة برمز هـ فتؤول الى

$\text{ا}^{\frac{1}{\text{ح}}} = \text{هـ}$ ويستخرج من ذلك $\text{ا} = \text{هـ}^{\text{ح}}$ وباخذ لوغاريتمات من الطرفين يوجد

$$\text{لو ا} = \text{لو هـ}^{\text{ح}} = \text{ح لو هـ} \quad \text{ومنه}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{لو ا}}{\text{لو هـ}} \cdots\cdots\cdots (21)$$

وعدد هـ المعلوم مقداره بمعادلة $\text{هـ} = 1 + 1 \ldots$ [illegible]

هو الذي اتخذه نيبر اساسا لحساب جدول لوغاريتماته المسماة باللوغاريتمات الطبيعية أو النبيرية وقد يكتفى بالعشرة حدود الاول من

الى صَ = حـ‌ ـ ج حـ ه + الحدود المحوية على ه٢ وعلى ه٣ وعلى ه٤ الخ

و اذا طرحنا المعادلة الاولية التى هى صـ = حـ من هذه المعادلة يبقى

صَـ ـ صـ = ج حـ ه + الحدود المحتوية على ه٢ و ه٣ .. الخ

وبالارتقاء الى النهاية يوجد وَصـ/وَسـ = ج حـ وبوضع مقدار صـ

عوضا عنها يوجد وَحـ/وَسـ = ج حـ .... (١٩)

كمية ج الثابتة تتعلق بكمية حـ لانه اذا وضعنا عوضا عن ى مقدارها الذى هو حـ ـ ١ فى معادلة

ج = (ى ـ ى٢/٢ + ى٣/٣ ـ ى٤/٤ + ... الخ) حدث

ج = (حـ ـ ١) ـ (حـ ـ ١)٢/٢ + (حـ ـ ١)٣/٣ ـ (حـ ـ ١)٤/٤ + الخ .. (٢٠)

* ٣٧ * ولنشرع فى كيفية ايجاد مقدار آخر سهل لكمية ج الثابتة ولذلك نبحث عن حل كمية حـ بواسطة قضية مكلوران فيكون

صـ = حـ

وَصـ/وَسـ = ج حـ

وَ٢صـ/وَسـ٢ = ج وَحـ/وَسـ = ج ج حـ وَسـ/وَسـ = ج٢ حـ

وَ٣صـ/وَسـ٣ .... = ج٣ حـ الخ

وبجعل

هـ بالنسبة للوغاريتم الطبيعي اي الذي اساسه هـ

اما اذا كان هذا الاساس حيث اتفق ان كان ح مثلا فانه يوجد

لوغ ح = ١ ويكون و/ ص = و س / ص لوغ هـ

في تفاضل الجيوب وجيوب التمام وكذا باقي الخطوط المساحية اي تفاضل الدوال القوسية

* ٣٩ * القوس اكبر من جيبه واصغر من ظله ابدا ولاثبات ذلك نفرض قوس اب (شكل ٢) فجيب هذا القوس يكون ب و وظله يكون د ا [illegible] يكون خطا مستقيما [illegible] واذن يكون نصف هذا المستقيم وهو الجيب ب و اصغر من نصف هذا المنحني وهو ب ا اعني قوس الجيب

واما اثبات كون الظل اكبر من قوسه فهو انه حيث ان مثلث د ا ح اكبر من قطاع ب ا ح يوجد د ا × ١/٢ ا ح > قوس ب ا × ١/٢ ا ح وباسقاط ١/٢ ا ح من الطرفين يتحقق [illegible] قوس ب ا وبتنصيف الطرفين يوجد د ا > قوس ب ا وهو ما اردنا اثباته

* ٤٠ * ويتبع مما سبق ان نهاية نسبة الجيب الى قوسه واحد لانه متى يكون قوس ا ب صفرا ينطبق الجيب على الظل فينطبق الجيب على القوس من باب اولى ويعلم من ذلك انه يوجد نهاية جا ا ب / قوس ا ب = ١ وبالتعبير بحرف هـ للقوس ا ب يكون

جا هـ / هـ = ١

* ٤١ * ولايجاد تفاضل الجيب الذي قوسه س نفرض ان هذا القوس يزداد بزيادة قدرها هـ فيحدث بواسطة حساب المثلثات

جا (س + هـ) = جا س جتا هـ + جا هـ جتا س ... (٢٣)

وبطرح جا س يعني حالة الجيب الاولى من كل من طرفي هذه المعادلة

متسلسلة $١ + ١ + \frac{١}{٢×١} + \frac{١}{٣×٢×١} + ...$ الخ

ويوجد حينئذ $هـ = ٢٫٧١٨٢٨١٨$ تقريبا واذا رمزنا برمز

لوح لوغاريتم ح فى الجملة الطبيعية او الرائدة نجد $ح = (٢٫٧١٨٢٨١٨)^{لوح}$

واختصارا $ح = هـ^{لوح}$ واذن $لوغا ح = لوغا هـ^{لوح}$ ولوغا ح = لوح لوغا هـ

ويستخرج من ذلك $\frac{لوغا ح}{لوغا هـ} =$ لوح وبهذا تؤول معادلة (٢١) الى

$ع =$ لوح ومن ثم يستخرج من معادلة (١٩)

$$و ح^{س} = ح^{س} و س . لوح .... (٢٢)$$

(فى التفاضلات اللوغاريتمية)

* ٣٨ * لتكن س لوغاريتم لكمية ص فى الجملة التى اساسها

ح فيوجد $ص = ح^{س}$ وباخذ تفاضل الطرفين (بند ٣٦) يحدث

$و ص = ع ح^{س} و س$ ومنه يستخرج

$$و س = \frac{و ص}{ع ح^{س}} = \frac{و ص}{\frac{لوغا ح}{لوغا هـ} × ح^{س}}$$ وبضرب كيفى الكسر الكلى فى

لوغا هـ يوجد

$$و س = \frac{و ص}{ح^{س}} \frac{لوغا هـ}{لوغا ح}$$ وبما ان $ح^{س} =$ ص وكانت س = لوغا ص

تؤول المعادلة السابقة الى $و . لوغا ص = \frac{و ص}{ص} \frac{لوغا هـ}{لوغا ح}$

وفى الحالة التى تؤخذ فيها اللوغاريتمات من جملة نبير يكون $ح = هـ$

ويوجد $\frac{لوغا هـ}{لوغا ح} = \frac{لوغا هـ}{لوغا هـ} = ١$ واذن يكون $و . لوغا ص = \frac{و ص}{ص}$

هذا

جا (س+هـ) هذا وكتفاضل قوس ... كبرت زوية م ح الى ان [illegible] يمكن اعتبار زاوية م ح [illegible] مشابها لمثلث [illegible] لان اختلافهما [illegible] هذه المثابة وتحدث [illegible] أو ان : جتاس :: [illegible] جا (س+هـ) — جاس ومنها يستخرج

جاس [illegible] = [illegible] وفي النهاية يمكن تغيير وتر م ح بقوسه الذي هو م ح = هـ فاذا اعتبرنا ذلك فتؤول المعادلة السابقة الى

$$\frac{\text{ق جاس}}{\text{ق س}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{نق}} \quad \text{و}$$

$$\text{ق جاس} = \frac{\text{جتاس ق س}}{\text{نق}}$$ وباعتبار نصف القطر واحدا يكون

$$\text{ق جاس} = \text{جتاس ق س}$$

* ٤٤ * ولايجاد تفاضل جيب [illegible] تفاضل معادلة جا‌٢س + جتا‌٢س = ١ [illegible]

(جاس)٢ + (جتاس)٢ = ١ [illegible] (٢١) [illegible]

٢ جاس ق جاس + ٢ جتاس ق جتاس = ٠ [illegible]

[illegible] ق جتاس = [illegible]

ق جتاس [illegible] ق [illegible] (٤٠) [illegible]

ديوجد ق [illegible] = — [illegible] المطلوب

* ٤٥ * ولايجاد تفاضل ظل [illegible] ظاس = [illegible] ثم نأخذ تفاضلها (بند ١٩) فنجد

$$\text{ق ظاس} = \frac{\text{جتاس} \times \text{ق جاس} - \text{جاس} \times \text{ق جتاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

ثم بقسمة على الزيادة هـ للمتغير يوجد

$$\frac{جا(س+هـ) - جاس}{هـ} = \frac{جاس جتاهـ + جاهـ جتاس - جاس}{هـ}$$

ثم باخذ جاس مضروبا مشتركا فى الطرف الثانى للمعادلة الاخيرة يوجد

$$\frac{جا(س+هـ) - جاس}{هـ} = \frac{جاس(جتاهـ - ١)}{هـ} + \frac{جاهـ جتاس}{هـ} \quad (٢٤)$$

ومتى فرض هـ صفرا ينعدم جتاهـ — ١ ويؤول $\frac{جتاهـ - ١}{هـ}$

الى $\frac{٠}{٠}$ والاصلح حينئذ أن يوضع هذا الحد بصورة اخرى ولذلك يستخرج

من معادلة جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ = ١

جتا^{٢}هـ — ١ = — جا^{٢}هـ أو (جتاهـ — ١)(جتاهـ + ١) = — جا^{٢}هـ

ومنه يستخرج جتاهـ — ١ = — $\frac{جا^٢هـ}{جتاهـ + ١}$

فنضع هذا المقدار فى معادلة (٢٤) فتؤول تلك المعادلة الى

$$\frac{جا(س+هـ) - جاس}{هـ} = - جاس \frac{جاهـ}{جتاهـ+١} \cdot \frac{جاهـ}{هـ} + جتاس \frac{جاهـ}{هـ} \quad (٢٥)$$

وحين يفرض هـ = ٠ يوجد $\frac{جاهـ}{هـ} = ١$ و $\frac{جاهـ}{جتاهـ+١} = \frac{٠}{٢} = ٠$

ومعادلة (٢٥) تؤول بهذا السبب الى $\frac{و \cdot جاس}{و س}$ = جتاس

ويستخرج منه و·جاس = جتاس و س وهو المطلوب

* ٤٢ * هذا اذا كان نصف قطر ابادول مساويا للواحد فاذا لم يكن كذلك بان كان نق مثلا فنستعمل عوضا عن معادلة (٢٣) هذه المعادلة

$$جا(س+هـ) = \frac{جاس جتاهـ + جتاس جاهـ}{نق}$$

ومن ثم يلزم ابقاء ثابتة نق فى الناتج السابق ويوجد

$$و \cdot جاس = \frac{و س جتاس}{نق}$$ لتفاضل جيب القوس الذى نصف قطره نق

* ٤٣ * ويمكن ايجاد تفاضل جاس بواسطة الاعتبارات الهندسية لانه اذا رمزنا بحرف س لقوس اب (شكل ٣) وبحرف هـ لقوس بم كان عمود بح هو جاس وعمود مك هو

جامنكوس س + جتاس = ١ فيحدث من ذلك

و · جامنكوس س + و · جتاس = ٠ أو

و · جامنكوس س − جاس وس = ٠ أو

و · جامنكوس س = جاس و س

(فى تفاضل بعض دوال عالية عسرة)

* ٥٠ * القواعد السابقة تكفى لمعرفة تفاضل اى دالة متبوعة

بكمية عالية لانه اذا فرضنا مثلا أن ص = ح^(ى^س) ووضعنا ى^س = ع

وجدنا ص = ح^ع وباخذ التفاضل (بند ٣٧) يكون

وص = ح^ع لوح وع او

وص/وع = ح^ع لوح = ح^(ى^س) لوح

وكذا يوجد باخذ تفاضل طرفى معادلة ى^س = ع ان

وع = ى^س لوى وس او

وع/وس = ى^س لوى واذن يكون (بند ٣٤)

وص/وع × وع/وس او وص/وس = ح^(ى^س) ى^س لوح لوى

* ٥١ * ليكن ايضا ص = ع^ر (ع و ر كميات متغيرة)

فنأخذ لوغاريتم كل من الطرفين فيحدث

لوغا ص = ر لوغا ع ثم نأخذ التفاضل فيحدث

و · لوغا ص = ر و · لوغا ع + لوغا ع و ر

ونضع عوضا عن و· جاس و و· جتاس مقداري جتاس و·س
و − جاس و·س فيحدث من ذلك

$$\text{و·ظاس} = \frac{(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س})\,\text{و·س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

واذن يكون $\text{و·ظاس} = \frac{\text{و·س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$ لأن $\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س} = 1$

* ٤٦ * يعرف من حساب المثلثات ان نصف القطر وسط متناسب بين الظل وظل التمام وبين جيب التمام والقاطع ومن ثمة كان

$\text{ظتاس} = \frac{1}{\text{ظاس}}$ و $\text{قاس} = \frac{1}{\text{جتاس}}$ فاذا اخذ تفاضل الاولى (بند ١٩) حدث

$$\text{و·ظتاس} = -\frac{\text{و·ظاس}}{\text{ظا}^2\text{س}} = -\frac{\text{و·س}}{\text{جتا}^2\text{س}\,\text{ظا}^2\text{س}} = -\frac{\text{و·س}}{\text{جا}^2\text{س}}$$

لانه يستخرج من معادلة $\frac{\text{جا}}{\text{جتا}} = \text{ظا}$ أن $\text{جتا ظا} = \text{جا}$

* ٤٧ * واذا اخذ تفاضل المعادلة الثانية التي هي $\text{قاس} = \frac{1}{\text{جتاس}}$

حدث $\text{و·قاس} = -\frac{\text{و·جتاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{\text{جاس و·س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$$= \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\frac{1}{\text{جتاس}}\,\text{و·س} = \text{ظاس قاس و·س}$$

* ٤٨ * ولايجاد تفاضل قاطع التمام نأخذ تفاضل معادلة

$\text{قتاس} = \frac{1}{\text{جاس}}$ فيوجد

$$\text{و·قتاس} = -\frac{\text{جتاس و·س}}{\text{جا}^2\text{س}} = -\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\frac{1}{\text{جاس}}\,\text{و·س}$$

$$= -\text{ظتاس قتاس و·س}$$

* ٤٩ * واما لايجاد تفاضل الجيب المنكوس وهو جزء نصف القطر المحصور بين موقع الجيب والقوس فيكفي ان يؤخذ تفاضل هذه المعادلة

جا

أو بجملة متغيرات وهذا الاخذ كان بالنسبة الى متغير سـ ثم قسم الناتج على وسـ كما لو كان صـ = حـ سـ٢ ع٣ ر٤ مثلا فان كمية $\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}}$ فيها توجد باخذ التفاضل بحسب سـ يعني باعتبار كميتي ع و ر ثابتتين ثم يقسم التفاضل على وسـ فيحدث من ذلك

$$\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}} = ٢\ \text{حـ}\ \text{ع}^{٣}\ \text{ر}^{٤}\ \text{سـ}$$ وكذا يوجد أن

$$\frac{\text{وصـ}}{\text{وع}} = ٣\ \text{حـ}\ \text{سـ}^{٢}\ \text{ع}^{٢}\ \text{ر}^{٤} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وصـ}}{\text{ور}} = ٤\ \text{حـ}\ \text{سـ}^{٢}\ \text{ع}^{٣}\ \text{ر}^{٣}$$

واذا فرض صـ = سـ٢ + ع٢ فانه يوجد

$$\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}} = ٢\text{سـ} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وصـ}}{\text{وع}} = ٢\text{ع}$$

* ٥٣ * اذا غير متغير سـ بكمية سـ + هـ في دالة بهذه الصورة صـ = ى سـ ثم اخذ تفاضل طرفيها باعتبار كمية هـ ثابتة وكمية سـ متغيرة فأقول أن المكرر التفاضلي لها في هذه الحالة يساوي المكرر التفاضلي لها حين يؤخذ تفاضلها باعتبار كمية هـ متغيرة وكمية سـ ثابتة وبرهان ذلك هو أنه حيث كان بتغيير سـ بكمية سـ + هـ يوجد صـَ = د(سـ + هـ) او

صـَ = د سـَ بفرض سـ + هـ = سـَ فبأخذ تفاضل الطرفين يكون وصـَ = و.د سـَ لكن تفاضل دالة سـَ يتركب من حاصل ضرب دالة اخرى الى سـَ في و سـَ

فاذا فرض ان هذه الدالة تكون دسـَ حدث من ذلك

وصـَ = دسـَ وسـَ وبوضع سـ + هـ عوضا عن سـَ يكون

وصـَ = د (سـ + هـ) و (سـ + هـ)

ومن البيان التغير الذي يتسبب من جعل سـ متغيرة و هـ ثابتة في هذا

ونضع عوضا عن التفاضلات اللوغاريتمية مقاديرها (بند ٣٨) فيكون،

$$\frac{\text{وص}}{\text{ص}} = \text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع ور}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\text{وص} = \text{ص}\left(\text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع ور}\right) = \text{ع}^{\text{ر}}\left(\text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع ور}\right)$$

وبواسطة هذا التفاضل يوجد بالسهولة تفاضل $\text{ص} = \text{ع}^{\text{ف}^{\text{س}}}$

(وكميات ع و ف و س كلها متغيرة) لانه اذا وضعنا $\text{ف}^{\text{س}} = \text{ر}$ آلت المعادلة الى $\text{ص} = \text{ع}^{\text{ر}}$

ومعادلتا $\text{ص} = \text{ع}^{\text{ر}}$ و $\text{ر} = \text{ف}^{\text{س}}$ الشبيهتان بالمعادلة المأخوذ تفاضلها انفا ينشأ عنهما

$$\text{وص} = \text{ع}^{\text{ر}}\left(\text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع ور}\right)$$

$$\text{ور} = \text{ف}^{\text{س}}\left(\text{س}\,\frac{\text{وف}}{\text{ف}} + \text{لوغا ف وس}\right)$$

كما في المثال السابق في اول البند

واذا وضعنا في مقدار وص المبين بالمعادلة التي قبل الاخيرة عوضا عن ور و ر مقاديرها وجدنا

$$\text{وص} = \text{ع}^{\text{ف}^{\text{س}}}\left[\text{ف}^{\text{س}}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع ف}^{\text{س}}\left(\text{س}\,\frac{\text{وف}}{\text{ف}} + \text{لوغا ف وس}\right)\right].$$

$$= \text{ع}^{\text{ف}^{\text{س}}}\,\text{ف}^{\text{س}}\left(\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{س لوغا ع}\,\frac{\text{وف}}{\text{ف}} + \text{لوغا ع لوغا ف وس}\right)$$

(في قضية تيلور)

* ٥٢ * قبل التجوّن ننبه ان الكمية التي ككمية $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ في حساب التفاضل تدل على انه أخذ تفاضل دالة ص المتعلقة بمتغير واحد

او بجملة

$\frac{و ص}{و س}$ ... (س + ه) و س أو $\frac{و ص}{و س}$ ... (س + ه)

$\frac{و ص}{و ه}$ ... (س + ه) و ه أو $\frac{و ص}{و ه}$ ... (س + ه)

ويتج من ذلك ان $\frac{و ص}{و س} = \frac{و ص}{و ه}$

وبمثل هذا يثبت ان

$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = \frac{و^٢ ص}{و ه^٢}$ و $\frac{و^٣ ص}{و س^٣} = \frac{و^٣ ص}{و ه^٣}$ وهلم جرا

* ٥٥ * ... ه ... هذه الدالة بالنسبة لقوى ه ... فنوجد

$ص = ص + ح ه + ح ه^٢ + ح ه^٣ + ح ه^٤ + الخ$ (٢٨)

وكيات ص ، ح ، ح ، ح ... الخ هي دوال الكمية س مجهولة بالشرط ... معادلة (٢٨) بالنسبة للمتغير ه وتقسيم ... على و ه فيوجد

$\frac{و ص}{و ه} = ح + ٢ ح ه + ٣ ح ه^٢ + ٤ ح ه^٣ + الخ$

... بالنسبة للمتغير س ... على و س فيوجد

$\frac{و ص}{و س} = \frac{و ص}{و س} + \frac{و ح}{و س} ه + \frac{و ح}{و س} ه^٢ + الخ$

ولما كان الطرفان ... (عدد ٥٣) لزم ان يكون الطرفان لثانيان متطابقين اعني متساويين تساويا تتساوى فيه مكررات قوى ه المتناظرة بحيث يكون

والحاصل لم يخرج عن مضروب و $(س+ه)$ الذي يؤول في هذه الحالة
الى و س فمن اجل ذلك يكون

$$وَصَ = د(س+ه)\,وس$$ ومنه يستخرج

$$\frac{وَصَ}{وس} = د(س+ه) \cdots\cdots\cdots (٢٦)$$

واما اذا كانت س هي الثابتة ركية ه هي المتغيرة فان مضروب
و $(س+ه)$ يؤول الى وه ويكون

$$وَصَ = د(س+ه)\,وه$$ ومنه ينتج

$$\frac{وَصَ}{وه} = د(س+ه) \cdots (٢٧)$$

وبمساواة مقداري $د(س+ه)$ ببعضهما يكون

$$\frac{وَصَ}{وس} = \frac{وَصَ}{وه}$$ وهو المطلوب بيانه واثباته

مثال ذلك $ص = ح\,س^{٣}$ فانه يحدث بوضع $(س+ه)$ محل س
$صَ = ح\,(س+ه)^{٣}$ وبأخذ التفاضل بفرض س متغيرة
وعكسه يوجد

$$\frac{وَصَ}{وس} = ٣ح\,(س+ه)^{٢} = \frac{وَصَ}{وه}$$ ومن ثم $$\frac{وَصَ}{وس} = \frac{وَصَ}{وه}$$

* ٥٤ * حيث انه بأخذ تفاضل معادلتي (٢٦) و (٢٧)
بالنسبة الى س + ه توجد ايضا نواتج متساوية

$$\frac{و^{٢}صَ}{وس} = دَ(س+ه)\,و(س+ه)$$

$$\frac{و^{٢}صَ}{وه} = دَ(س+ه)\,و(س+ه)$$

فاذا جعلنا ه ثابتة في الاولى و س ثابتة في الثانية يحدث

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د}\text{س}^2} = -\frac{1}{4}\,\text{س}^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{\text{س}^3}}$$ و

$$\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{د}\text{س}^3} = \frac{3}{8}\,\text{س}^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\sqrt{\text{س}^5}}$$ الخ

ثم توضع هذه المقادير في قانون تيلور فيوجد

$$\sqrt{\text{س}+\text{هـ}} = \sqrt{\text{س}} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{هـ}}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{1}{8}\,\frac{\text{هـ}^2}{\sqrt{\text{س}^3}} + \frac{1}{16}\,\frac{\text{هـ}^3}{\sqrt{\text{س}^5}}$$ الخ

* ٥٧ * ليكن صَ = جا (س + هـ) فينتج من ذلك أن
ص = جا س وتؤخذ المكررات التفاضلية المتوالية هكذا

$\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}}$ = جتا س و $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د}\text{س}^2}$ = − جا س و $\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{د}\text{س}^3}$ = − جتا س

و $\frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{د}\text{س}^4}$ = جا س و $\frac{\text{د}^5\text{ص}}{\text{د}\text{س}^5}$ = جتا س والخ

وبوضع هذه في قانون تيلور يوجد

$$\text{جا}(\text{س}+\text{هـ}) = \text{جا س} + \text{جتا س}\,\frac{\text{هـ}}{1} - \text{جا س}\,\frac{\text{هـ}^2}{1\times2} - \text{جتا س}\,\frac{\text{هـ}^3}{1\times2\times3}$$
$$+\ \text{جا س}\,\frac{\text{هـ}^4}{1\times2\times3\times4} + \text{جتا س}\,\frac{\text{هـ}^5}{1\times2\times3\times4\times5}$$ والخ

واذا فرضنا ان س = ٠ يكون جا س = ٠ و جتا س = ١
والقانون الاخير يؤول الى

$$\text{جا هـ} = \text{هـ} - \frac{\text{هـ}^3}{2.3} + \frac{\text{هـ}^5}{2.3.4.5} -$$ الخ

واذا اخذ صَ = جتا (س+هـ) وجدت بعد اجراء عمل مشابه للسابق أن

$$\text{جتا هـ} = 1 - \frac{\text{هـ}^2}{1\times2} + \frac{\text{هـ}^4}{1\times2\times3\times4} -$$ الخ

* ٥٨ * تبحث ايضا عن حل لوغا (س + هـ) ولذلك نضع
صَ = لوغا (س + هـ) فيكون

$$ح = \frac{وص}{وس} \quad و \quad ٢ ح' = \frac{وح}{وس} \quad و \quad ٣ ح'' = \frac{وح'}{وس} \quad و \quad ٤ ح''' = \frac{وح''}{وس} \quad \text{الخ او}$$

$$ح = \frac{وص}{وس} \quad و \quad ح' = \frac{وح}{٢ وس} \quad و \quad ح'' = \frac{وح'}{٣ وس} \quad و \quad ح''' = \frac{وح''}{٤ وس} \quad \text{الخ}$$

وبوضع مقدار $ح$ الذى هو $\frac{وص}{وس}$ المبين بالاولى من المعادلات الاخيرة في المعادلة الثانية منها يوجد

$ح' = \frac{١}{١\times٢} \frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}$ وبوضع هذا المقدار عوضا عن $ح'$ في المعادلة الثالثة التي هي $ح'' = \frac{وح'}{٣ وس}$ يحدث $ح'' = \frac{١}{١\times٢\times٣} \frac{و^{٣}ص}{وس^{٣}}$

وهلم جرا ثم انه بواسطة مقادير $ح$ و $ح'$ و $ح''$ ..... الخ هذه تؤول معادلة (٢٨) الى

$$ص' = ص + \frac{وص}{وس} ه + \frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} \frac{ه^{٢}}{١\times٢} + \frac{و^{٣}ص}{وس^{٣}} \frac{ه^{٣}}{١\times٢\times٣} + \text{الخ}$$

وبوضع مقدار $ص'$ في هذه يوجد

$$د(س+ه) = ص + \frac{وص}{وس} ه + \frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} \frac{ه^{٢}}{١\times٢} + \frac{و^{٣}ص}{وس^{٣}} \frac{ه^{٣}}{١\times٢\times٣} + \text{الخ}$$

وهذا هو قانون تيلور ودستوره

(تطبيق قانون تيلور على حل وتسلسل جملة دوال متنوعة)

* ٥٦ * ليكن $ص' = \sqrt{س+ه}$ فيحدث منه

$ص = \sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$ واذن يكون

$$\frac{وص}{وس} = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} \frac{١}{\sqrt{س}} \quad و$$

$و^{٢}$

$$\text{و}' \text{ح}^{\text{س}} = \text{ح}^{\text{س}} \text{و}\text{س} \text{ لو ح}$$

* ٦٠ * يمكن استنتاج قانون مكلورين من قانون تيلور بالوجه الآتي وهو ان تجعل س = ٠ في قانون تيلور الذي هو

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{دس} + \frac{\text{و}'\text{دس}}{\text{وس}}\text{ه} + \frac{\text{و}''\text{دس}}{\text{وس}^{٢}}\frac{\text{ه}^{٢}}{١\times٢} \text{ الخ}$$

وترمز برمز (دس) لما تؤول اليه دس حين يفرض فيها س = ٠

ونرمز $\left(\frac{\text{و}'\text{دس}}{\text{وس}}\right)$ لما تؤول اليه كمية $\frac{\text{و}'\text{دس}}{\text{وس}}$ حين يفرض فيها س = ٠ وهلم جرا نظرا لباقي المكررات التفاضلية فالقانون المذكور يؤول حينئذ الى

$$\text{د ه} = (\text{دس}) + \left(\frac{\text{و}'\text{دس}}{\text{وس}}\right)\text{ه} + \left(\frac{\text{و}''\text{دس}}{\text{وس}^{٢}}\right)\frac{\text{ه}^{٢}}{١\times٢} + \text{ الخ}$$

و ه في هذه المعادلة تدخل في د ه كما تدخل س في دس بحيث لو غيرت ه بكمية س آلت د ه الى دس وحيث لم يبق اثر الى س في المعادلة الاخيرة فلا سبيل لعدم التغيير وبالحقيقة فلا فرق بين وضع اى حرف مكان ه وبين ه ومن ثم يوجد باجراء هذا التغيير

$$\text{دس} = (\text{دس}) + \left(\frac{\text{و}'\text{دس}}{\text{وس}}\right)\text{س} + \left(\frac{\text{و}''\text{دس}}{\text{وس}^{٢}}\right)\frac{\text{س}^{٢}}{١\times٢} + \text{ الخ}$$

وهذا هو قانون مكلوران

(في تفاضل المعادلات التي بمتغيرين)

* ٦١ * لتكن ك (س وص) = ٠ (٢٩)

معادلة بمتغيرين فحلها بالنسبة الى ص يوجد

ص = دس واذا وضعنا هذا المقدار في معادلة (٢٩) فتؤول الى

ص = لوغا س وباخذ التفاضل يحدث

$\text{وَص} = \text{وَ. لوغا س} = \frac{\text{وَس}}{\text{س}}$ ومنه ينتج

$\frac{\text{وَص}}{\text{وَس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ثم يوجد بالتفاضلات المتوالية

$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2} = -\frac{1}{\text{س}^2}$ و $\frac{\text{و}^3\text{ص}}{\text{وس}^3} = \frac{2}{\text{س}^3}$ الخ

وبوضع هذه المقادير في قانون تيلور يوجد

$\text{لوغا (س+ه)} = \text{لوغا س} + \frac{\text{ه}}{\text{س}} - \frac{\text{ه}^2}{2\text{س}^2} + \frac{\text{ه}^3}{3\text{س}^3}$ الخ

* ٥٩ * يمكن بالسهولة ايجاد تفاضل اللوغاريتم بواسطة القانون الاخير اللوغاريتمي اذا فرض ان هذا القانون موجود بواسطة الجبر فقط كما هو مبين في الملحوظة الاولى في اخر هذا الكتاب وبالحقيقة فانه يحدث منه

$\frac{\text{لوغا (س+ه)} - \text{لوغا س}}{\text{ه}} = \frac{1}{\text{س}} - \frac{\text{ه}}{2\text{س}^2} +$ الخ

وحين نرتقي الى النهاية نجد

$\frac{\text{و. لوغا س}}{\text{وس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ومنه يحدث

$\text{و. لوغا س} = \frac{\text{وس}}{\text{س}}$

وحيث انه قد علم تفاضل اللوغاريتم فيسهل من بعده ايجاد تفاضل $\text{ح}^{\text{س}}$ لانه

بفرض $\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}}$ واخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل من الطرفين يوجد

$\text{لوص} = \text{لوح}^{\text{س}} = \text{س لوح}$ وباخذ التفاضل يحدث

$\frac{\text{وص}}{\text{ص}} = \text{وس لوح}$ وينتج من ذلك

$\text{وص} = \text{ص وس لوح}$ وبوضع $\text{ح}^{\text{س}}$ عوضا عن ص يكون

و.

يدلك على ايجاد مقدار مكرر $\frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}}$ التفاضلي كما ستراه في المثال الآتي

ولنفرض كون $\text{د}(\text{سـ و صـ}) = \text{سـ}^{٢} + ٣\,\text{د}\,\text{صـ} - \text{صـ}^{٢} = ٠$ (٣٠)

فاذا اخذنا تفاضلها بالطريقة المعتادة [illegible] بلا احتياج [illegible] التقدم

برهانه نجد

$$٢\,\text{سـ}\,\text{وَسـ} + ٣\,\text{د}\,\text{وَصـ} - ٢\,\text{صـ}\,\text{وَصـ} = ٠ \quad (٣١)$$

ومنها يحدث $\frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}} = \frac{٢\,\text{سـ}}{٢\,\text{صـ} - ٣\,\text{د}}$ ..... (٣٢)

* ٦٣ * لمطابقة الطريقة التي استعملت لاجل هذا المقدار مع الطريقة التي استعملناها فيما سبق الى الآن نحصر نتيجتها بالطريقة الاولى ان نضع معادلة (٣٠) بهذه الصورة

$$\text{صـ} = \text{د سـ}$$

يعني انه ينبغي حلها بالنسبة الى صـ ليستخرج منها بواسطة التفاضل مقدار $\frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}}$ فبسلوك هذه الطريقة نجد اولا

$\text{صـ} = \frac{٣\,\text{د}}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩}{٤}\text{د}^{٢} + \text{سـ}^{٢}}$ ثم نجد بواسطة التفاضل

$$\frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}} = \pm \frac{\text{سـ}}{\sqrt{\frac{٩}{٤}\text{د}^{٢} + \text{سـ}^{٢}}}$$

ومقدار $\frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}}$ هذا متبين بصورة مخالفة للتي في معادلة (٣٢)

لكن اذا وضع مقدار صـ المستخرج من (٣٠) في معادلة (٣٢) يوجد

$$\frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}} = \pm \frac{٢\,\text{سـ}}{٢\sqrt{\frac{٩}{٤}\text{د}^{٢} + \text{سـ}^{٢}}} = \pm \frac{\text{سـ}}{\sqrt{\frac{٩}{٤}\text{د}^{٢} + \text{سـ}^{٢}}}$$

وهو كالمبين قبل ومعادلة (٣١) هي التفاضل الاول لمعادلة (٣٠)

$\text{ى}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ءس}) = 0$ أو الى

$\text{دس} = 0$ اختصارا

وهذه المعادلة الاخيرة هى متطابقة وجميع حدودها يمحو بعضها بعضا باخذ س اى مقدار كان فاذا لم ترد هذه المعادلة عن الدرجة الثالثة مثلا امكن وضعها هكذا $\text{ع}\,\text{س}^{3} + \text{ح}\,\text{س}^{2} + \text{ب}\,\text{س} + \text{و} = 0$

وحيث انها دائما متحققة بأخذ متغير س اى مقدار كان فتتحقق بوضع $\text{س} + \text{هـ}$ فيها عوضا عن س ويوجد حينئذ

$$\text{ع}(\text{س}+\text{هـ})^{3} + \text{ح}(\text{س}+\text{هـ})^{2} + \text{ب}(\text{س}+\text{هـ}) + \text{و} = 0$$

ويعلم من ذلك انه متى كان $\text{دس} = 0$ فلابد وان يكون $\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = 0$ ايضا مهما كانت كمية س هذا واذا طرحت من هذه المعادلة معادلة $\text{دس} = 0$ بقى

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{دس} = 0 \quad \text{أو}$$

$$\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{دس}}{\text{هـ}} = 0$$

ولكن $\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \text{دس} + \text{ع}\,\text{هـ} + \text{ح}\,\text{هـ}^{2} + \text{ب}\,\text{هـ}^{3} + \text{الخ}$

فيستخرج منه $\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{دس}}{\text{هـ}} = \text{ع} + \text{ح}\,\text{هـ} + \text{ب}\,\text{هـ}^{2} + \text{الخ}$

وحيث كان الطرف الاول لهذه المعادلة صفرا فيكون

$\text{ع} + \text{ح}\,\text{هـ} + \text{ب}\,\text{هـ}^{2} + \dots \text{الخ} = 0$ كذلك وبالارتقاء الى النهاية يكون

$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{وس}} = \text{ع} = 0$ وبحذف المقام يوجد

$\therefore \text{دس} = \text{ع}\,\text{وس} = 0$ وبابقاء ص يوجد

$\therefore \text{ى}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص}) = \text{ع}\,\text{وس} = 0$

ويعلم من ذلك انه اذا اخذ تفاضل معادلة $\text{ى}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص}) = 0$ باعتبار كمية ص فيها ثابتة والمتغير س امكن مساواة الناتج بصفر ويستعين بذلك

التفاضل وتكميل العملية كافٍ في ايجاد تفاضل شيء فيحدث تفاضل الثالث وهلم جرا

* ٦٣ * وعوضا عن استعمال حروف ـ و ـ و ع و خ لاجل جمع العمليات يؤخذ تفاضل معادلة (٢١) ويوضع فيها و٢س بدلا عن تفاضل ص و و٢ص بدلا عن تفاضل وص و و٣ص بدلا عن تفاضل و٢ص وهكذا باعتبار وس كمية ثابتة فينتهى الى ناتج كالسابق ويوجد بهذه الكيفية

٢و٢س + ٣دو٢ص − ٢و٢ص٢ − ٢ص و٢س = ٠

وهذه المعادلة هى كمعادلة (٣٤)

* ٦٤ * ولنبحث الآن عن المقدار العمومى لتفاضل معادلة

د(س و ص) = ٠

ولذلك نرمز لكمية د(س و ص) بحرف ع فنجد باخذ تفاضل هذه الدالة بالنسبة الى متغير س هذا الحد (وع / وس) وس

ونجد ايضا باخذ تفاضلها بالنسبة الى متغير ص هذا الحد الثانى

(وع / وص) وص ويكون حينئذ و.د(س و ص) أو

وع = (وع / وس) وس + (وع / وص) وص واذا كانت ص

معتبرة دالة لمتغير س فانه يوجد باخذ تفاضلها وص = (وص / وس) وس

وبوضع هذا المقدار فى كمية وع يكون

وع = (وع / وس) وس + (وع / وص) (وص / وس) وس

* ٦٥ * واذا راجعت القضية المثبوتة فى (بند ٢٤) شاهدت ان

ولايجاد المعادلة التي يعلم بها المكرر التفاضلي بدرجة ثانية يعني $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$

تقسم حدود معادلة (٣١) على وس ونجعل $\frac{وص}{وس} = ع$

فتؤول هذه المعادلة الى $٢س + ٣د ع - ٢ص ع = ٠$

واذا اعتبرنا فيها بعد ذلك كميتي ص و ع كدالتين لمتغير س نجد بواسطة التفاضل

$$٢وس + ٣د وع - ٢ص وع - ٢ع وص = ٠$$

وبالقسمة على وس ووضع ع عوضا عن $\frac{وص}{وس}$ يوجد

$$٢ + ٣د \frac{وع}{وس} - ٢ص \frac{وع}{وس} - ٢ع^٢ = ٠$$ ومنها

يستخرج $\frac{وع}{وس} = \frac{٢ع^٢ - ٢}{٣د - ٢ص}$ .... (٣٣)

الآن حيث ان $ع = \frac{وص}{وس}$ يستخرج منه $\frac{وع}{وس} = \frac{و^٢ص}{وس^٢}$

وبوضع هذه المقادير في معادلة (٣٣) عوضا عن ع و $\frac{وع}{وس}$.

يوجد بعد حذف المقام

$$و^٢ص (٣د - ٢ص) = ٢وص^٢ - ٢وس^٢ \quad .... (٣٤)$$

وهذا هو التفاضل الثاني لمعادلة (٣٠) ولاجل ايجاد التفاضل الثالث

نجعل $\frac{وع}{وس} = عَ$ فتؤول معادلة (٣٣) بعد حذف مقامها الى

$$٣د عَ - ٢ص عَ = ٢ع^٢ - ٢$$

ثم تعتبر كميات ص و ع و عَ كدوال لمتغير س ويؤخذ

التفاضل

في المعادلة الاخيرة لم يكن ماخوذا بالنسبة الى س بل هو مأخوذ بالنسبة الى ص ولا يعرف هل التفاضل في الحالة الاخيرة كالتفاضل في الحالة الاولى اولا ولرفع هذا الاشكال نقول انه قد ثبت في (بند ٢٤) ان

$$\frac{\text{و ع}}{\text{و س}} = \frac{\text{و ع}}{\text{و ص}} \cdot \frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$$

فاذا فرضنا ان ع = س تؤول هذه المعادلة الى

$$1 = \frac{\text{و س}}{\text{و ص}} \cdot \frac{\text{و ص}}{\text{و س}} \quad \text{ومنه يحدث} \quad \frac{\text{و س}}{\text{و ص}} = \frac{1}{\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}}$$

وهذا يبين ان تغيير فرضية التفاضل تتوافق مع الجبر وقواعده ولنثبت القضية المتقدمة من اول وهلة باثبات آخر فنقول

* ٦٨ * ليكن

$$\frac{\text{ص}' - \text{ص}}{\text{س}' - \text{س}} = \text{ح} + \text{خ ه} + \text{د ه}^2 + \text{ذ ه}^3 + \text{الخ}$$

فيحدث منه

$$\frac{\text{س}' - \text{س}}{\text{ص}' - \text{ص}} = \frac{1}{\text{ح} + \text{خ ه} + \text{د ه}^2 + \text{ذ ه}^3 + \text{الخ}}$$

وباجراء عملية القسمة على الطرف الثاني او بحله بواسطة قانون مكلورين يوجد

$$\frac{\text{س}' - \text{س}}{\text{ص}' - \text{ص}} = \frac{1}{\text{ح}} - \frac{\text{خ}}{\text{ح}^2}\text{ه} + \cdots\cdots \text{الخ}$$

وفي النهاية يوجد $\frac{\text{و س}}{\text{و ص}} = \frac{1}{\text{ح}}$ وحيث ان ح = $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$

[illegible]

([illegible])

* ٦٩ * الطريقة التي يوجد بها مقدار [illegible] الماس وتحت الماس والخط العمودي وتحت العمودي تسمى بطريقة المماسات ولكي [illegible] ذلك س و ص بعدا نقطة م المأخوذة من نقطة [illegible] (شكل ٤)

كمية ع معتبرة كدالة لمتغير ص و ص معتبرة كدالة لمتغير س

وحاصل ضرب $\frac{\text{وع}}{\text{وص}}\ \frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ ليس الا تفاضل ع المأخوذ بنسبة

س الداخلة في ص

* ٦٦ * لما كان التفاضل الكلي لدالة تحتوي على س و ص يعلم بمعادلة

$\text{وع} = \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\ \text{وس} + \frac{\text{وع}}{\text{وص}}\ \text{وص}$ سميت كميات

$\frac{\text{وع}}{\text{وس}}\ \text{وس}$ و $\frac{\text{وع}}{\text{وص}}\ \text{وص}$ بالتفاضلات الجزئية للدالة ع

وكذلك اذا كانت ع دالة لمتغيرات س و ص و ر الثلاث التي

ليست بمتعلقة فانه يوجد

$$\text{وع} = \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\ \text{وس} + \frac{\text{وع}}{\text{وص}}\ \text{وص} + \frac{\text{وع}}{\text{ور}}\ \text{ور}$$

والحدود $\frac{\text{وع}}{\text{وس}}\ \text{وس}$ و $\frac{\text{وع}}{\text{وص}}\ \text{وص}$ و $\frac{\text{وع}}{\text{ور}}\ \text{ور}$

تكون هي التفاضلات الجزئية للدالة ع

* ٦٧ * قد ذكرنا في (بند ٥٢) ان الكمية التي ككمية $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$

تبين انه اخذ تفاضل دالة ص بالنسبة لمتغير س وقسم الناتج بعد ذلك

على وس فينتج من ذلك انه اذا وجدت معادلة $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ح}$

و يستخرج منها $1 = \frac{\text{ح}}{\frac{\text{وص}}{\text{وس}}}$

فلا يمكن ان يستنتج منها $1 = \text{ح}\ \frac{\text{وس}}{\text{وص}}$ بدون برهان لان التفاضل

فيستخرج من المعادلة الاخيرة

ح ط = ص ÷ وص/وس وبما ان (بند ٦٧) يكون

ح ط = ص وس/وص أو وهو الأولى

ح ط = ص وس/وص = تحت المماس بالرمز بحرفي س و ص

لبعدي نقطة م

* ٧٠ * اذا رسمنا من نقطة م (شكل ٥) خط م ن عمودا

على م ط فتحت العمودي يكون ح ن ولتعيينه نعتبر النسب

ح ط : ح م :: ح م : ح ن أو

ص وس/وص : ص :: ص : ح ن فيحدث منه

ح ن = ص وص/وس = تحت العمودي

واما من قبل الخط المماس والخط العمودي فنعتبر معادلتي

م ط = √(ط ح² + ح م²) و

م ن = √(ح ن² + ح م²)

فيحدث من الاولى

م ط = √(ص² × وس²/وص² + ص²) = ص √(وس²/وص² + ١) = المماس

ويحدث من الثانية

م ن = √(ص² × وص²/وس² + ص²) = ص √(وص²/وس² + ١) = العمودي

فنزيد الافقى اح = س كمية حح َ = هـ ونرسم الرأسى حَ مَ
وتمر بنقطتى م و مَ قاطع مَ ع فمن البين انه كلما نقص حح َ
مال خط حع الى الانطباق على تحت المماس حط ولا يزال كذلك الى
ان ينعدم حح َ = هـ فيؤول حع الى تحت المماس حط
فى النهاية ويعلم من ذلك ان حط هو النهاية او الحد الذى يميل نحوه حع
ولنبحث الآن عن المقدار الجبرى لخط حع ليستخرج منه نهايته ولذلك
ننظر انه يحدث من تشابه مثلثى مَ م ك و م ع ح هذا التناسب

مَ ك : م ك :: م ح : ح ع أو

مَ ك : هـ :: ص : ح ع ومنه يستخرج

$$\text{ح ع} = \frac{\text{هـ ص}}{\text{مَ ك}}$$ ولتعيين مَ ك نضع

مَ ك = مَ حَ − م ح لكن مَ حَ = صَ = د(س + هـ) فيكون

$$\text{مَ حَ} = \text{ص} + \frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \cdots \text{الخ}$$

وغير ذلك م ح = ص فاذا طرحنا هاتين المعادلتين من بعضهما فيوجد

$$\text{مَ حَ} - \text{م ح} \ \text{أو}\ \text{مَ ك} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \text{الخ}$$

واذا وضعنا هذا المقدار فى مقدار ح ع عوضا عن مَ ك نجد أن

$$\text{ح ع} = \frac{\text{هـ ص}}{\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \cdots\cdots \text{الخ}}$$

وبقسمة البسط والمقام على هـ يكون

$$\text{ح ع} = \frac{\text{ص}}{\frac{\text{وص}}{\text{وس}} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}}{١\times٢} + \cdots\cdots \text{الخ}}$$

وحيث انه يوجد فى النهاية هـ = ٠ و ح ع يتغير بخط حط

فيستخرج

$$\text{ح ط} = \text{سَ}\,\frac{\text{وسَ}}{\text{وصَ}}$$ فيوجد

$$\text{ط} = \frac{\text{٢ سَ}}{\text{ب}}$$

فاذا وضعت في المعادلة الاخيرة ح ط عوضا عن س [illegible] حيث [illegible]

ط تحت المماس = ٢ [illegible]

(مثال ثاني)

المراد ايجاد تحت العمودي للقطع الناقص ولذلك نأخذ تفاضل طرفي معادلة القطع الناقص التي هي $\text{و}\,\text{صَ}^{٢} = \text{م}\,\text{سَ}^{٢}$ [illegible] ونجعل المعادلة تفاضلية فيوجد $\text{٢ و صَ وصَ} - \text{٢ م سَ وسَ} = ٠$ ويستخرج من ذلك $\frac{\text{وسَ}}{\text{وصَ}} = -\frac{\text{و صَ}}{\text{م سَ}}$ ثم نضع هذا المقدار في تحت العمودي

حيث فيكون ح ط وتحت العمودي = $-$ م سَ

(مثال الثالث)

المراد ايجاد الخط المماس للدائرة ولذلك نأخذ تفاضل معادلة الدائرة التي

هي $\text{سَ}^{٢} + \text{صَ}^{٢} = \text{نق}^{٢}$ بحسب نقطة التماس فيوجد

$\text{٢ سَ وسَ} + \text{٢ صَ وصَ} = ٠$ ومنه يحدث

$$\frac{\text{وصَ}}{\text{وسَ}} = -\frac{\text{سَ}}{\text{صَ}}\quad \frac{\text{وسَ}}{\text{وصَ}} = -\frac{\text{صَ}}{\text{سَ}}$$

ثم يوضع هذا المقدار في معادلة

$$\text{م ط} = \text{صَ}\sqrt{\frac{\text{وسَ}^{٢}}{\text{وصَ}^{٢}} + ١}$$ فتؤول تلك المعادلة الى

$$\text{م ط} = \text{صَ}\sqrt{\frac{\text{صَ}^{٢}}{\text{سَ}^{٢}} + ١} = \text{صَ}\sqrt{\frac{\text{صَ}^{٢} + \text{سَ}^{٢}}{\text{سَ}^{٢}}} = \frac{\text{صَ نق}}{\text{سَ}} = \text{المماس}$$

(في الخطوط المجانبة للخطوط المنحنية ويقال لها المقربة)

* ٧١ * ولايجاد معادلة الخط المماس نفرض ان سَ و صَ يكونان ابعاد نقطة التماس التى هى م فمعادلة مستقيم مار بنقطة م يمكن بيانها برسم صـ ـــ صَ = ح (سـ ـــ سَ) وكمية ح فى هذه المعادلة تمثل زاوية مطح ومقدار هذا الظل هو $\frac{\text{حم}}{\text{طح}}$ لانه يحدث من متناسبة ... : ... :: ١ : ظام طح

$$\text{ظام طح} = \frac{\text{حم}}{\text{طح}}$$

وينتج من بعد ذلك ان

$$\text{ظام طح} = \frac{\text{حم}}{\text{حط}} = \frac{\text{صَ}}{\text{تحت المماس}} = \frac{\text{صَ}}{\text{صَ}\,\frac{\text{و سَ}}{\text{و صَ}}} = \frac{\text{و صَ}}{\text{و سَ}}$$

فاذا وضعنا مقدار ح هذا فى معادلة الخط المماس تؤول تلك المعادلة الى

$$\text{صـ} - \text{صَ} = \frac{\text{و صَ}}{\text{و سَ}}\,(\text{سـ} - \text{سَ})$$ وهى معادلة الخط المماس المطلوبة

ومعادلة الخط العمودى تكون حينئذ

$$\text{صـ} - \text{صَ} = -\frac{\text{و سَ}}{\text{و صَ}}\,(\text{سـ} - \text{سَ})$$

* (تطبيق القوانين او الدساتير السابقة على الامثلة) *

* (المثال الاول) *

* ٧٢ * المراد ايجاد تحت المماس للقطع المكافى ولذلك نأخذ تفاضل طرفى معادلة القطع المكافى التى هى $\text{صَ}^2 = \text{ع سَ}$ بحسب نقطة التماس فيوجد ٢ صَ و صَ = ع و سَ ومنه يحدث

$$\frac{\text{و صَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢ صَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و سَ}}{\text{و صَ}} = \frac{\text{٢ صَ}}{\text{ع}}$$

وبوضع هذا المقدار فى معادلة

وبوضع مقدار ص عوضا عنه يوجد بعد الاختصار

اط = [illegible] وحين تقسم

كيتا [illegible] يوجد

اط = [illegible] و ب = [illegible]

ثم يجعل س = ∞ في هذه المقادير تكون

اط = — [illegible] و اب = [illegible] ....(٣٥)

ويعلم من ذلك انه يوجد للمنحنى المفروض مقربات ما لم تكن كمية ث صفرا
اوسالبة لانه حين تكون كمية ث سالبة تصير مقادير اب [illegible]
معادلات (٣٥) تخيليا ومن البين انه متى كانت ث سالبة انسبت
المعادلة الى قطع ناقص وتكون المعادلة بعينها معادلة قطع مكافئ متى كان
مقدار ث صفرا وفي هذه الحالة يتبين من معادلات (٣٥) ان اط و اب
يصيران غير متناهيين ويؤخذ منه ان القطع المكافئ لا مقربات له ولا جانب

في معادلة المستوى المماس بسطح منحن ومعادلة
الخط العمودي لهذا السطح

* ٧٥ * لتكن د (س و ص و ع) = ٠ معادلة سطح
منحن و ى س + ط ص + ل ع + ك = ٠ معادلة
مستو [illegible] س و ص و ع [illegible] نقطة التماس التي
هي [illegible] معادلة المستوى [illegible] في هذه النقطة تكون

ى س + ط ص + ل ع + ك = ٠

وبحذف ك من بين هاتين المعادلتين توجد المعادلة

ى (س — سَ) + ط (ص — صَ) + ل (ع — عَ) = ٠ (٣٦)

وهي معادلة المستوى المار بنقطة سَ و صَ و عَ ولرسم مستو
موازٍ للمستوى (س و ع) مار بنقطة التماس سَ و صَ و عَ

* ٧٣ * مقدار اط (شكل ٦) الذى هو بعد راس المنحنى عن نقطة تقابل الخط المماس بالخط الافقى يستخرج بالسهولة من معادلة الخط مماس لانه اذا جعلت رأس المنحنى التى هى ا نقطه اصلية كان خط اط هو بعد هذه الرأس عن النقطة التى يكون فيها الراسى م ح صفرا وحيث ان معادلة المماس م ط هى

$$\text{ص} - \text{صَ} = \frac{\text{و صَ}}{\text{و سَ}} (\text{س} - \text{سَ})$$

فيكفى ان يجعل فى هذه المعادلة $\text{ص} = ٠$ ليكون مقدار س الحادث منها مقدارا لخط اط ويوجد اذذاك

$$\text{اط} = \text{س} = \text{سَ} - \text{صَ} \frac{\text{و سَ}}{\text{و صَ}}$$

وهذا المقدار يكون هو بعد النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط المماس بالاحداثى الافقى ولايجاد بعد النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط المماس بالاحداثى الرأسى نبحث عن مقدار اب بان نقول انه لما كان هذا الخط هو الرأسى الموافق الى $\text{س} = ٠$ فى معادلة الخط المماس فيجب وضع $\text{س} = ٠$ حينئذ فى هذه المعادلة ليحدث منها

$$\text{ص} = \text{اب} = \text{صَ} - \frac{\text{و صَ}}{\text{و سَ}} \text{سَ}$$

ونفرض الآن ان س تصير غير منتهية وابعاد اط و اب لاتزال منتهية المقدار محدودة فخط ط ل (شكل ٧) لايقطع المنحنى حينئذ الا على بعد غير محدود فهو الخط المقربى للمنحنى المفروض

* ٧٤ * ولنمثل بهذه المعادلة $\text{صَ}^٢ = \text{م}\text{س} + \text{ه}\text{س}^٢$

فنستخرج منها $\frac{\text{و صَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{م} + ٢\text{ه}\text{سَ}}{٢\text{صَ}}$ واذن يكون

$$\text{اط} = \text{سَ} - \frac{٢\text{صَ}^٢}{\text{م} + ٢\text{ه}\text{سَ}} = \frac{\text{م}\text{سَ} + ٢\text{ه}\text{سَ}^٢ - ٢\text{صَ}^٢}{\text{م} + ٢\text{ه}\text{سَ}} = - \frac{\text{م}\text{سَ}}{\text{م} + ٢\text{ه}\text{سَ}}$$

$$\text{اب} = \text{صَ} - \frac{\text{م}\text{سَ} + ٢\text{ه}\text{سَ}^٢}{٢\text{صَ}} = \frac{٢\text{صَ}^٢ - \text{م}\text{سَ} - ٢\text{ه}\text{سَ}^٢}{٢\text{صَ}}$$

وبوضع

$$-\frac{\text{ح}}{\text{ى}} = \frac{\text{وع}'}{\text{وس}'} \text{ أو } \text{ح} = -\,\text{ى}\,\frac{\text{وع}'}{\text{وس}'} \quad \cdots (٣٨)$$

واذا رسمنا كذلك من نقطة م مستويا موازيا لمستوى (ص و ع) الاحداثى فيقطع هذا المستوى السطح المفروض فى منحنى م ى ويقطع المستوى المماس فى مستقيم م ق ويكون هذا المستقيم مماسا للمنحنى م ى وجميع نقطه تكون متساوية البعد عن مستوى (ص و ع) يعنى تكون افقياتها كلها متساوية فيكون $\text{س} = \text{س}'$ أو $\text{س} - \text{س}' = ٠$ وتؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى المعادلة

$\text{ط}\,(\text{ص} - \text{ص}') + \text{ى}\,(\text{ع} - \text{ع}') = ٠$ التى يستخرج منها

$\text{ع} - \text{ع}' = -\frac{\text{ط}}{\text{ى}}\,(\text{ص} - \text{ص}')$ وهذه المعادلة هى معادلة المستقيم م ق فيكون شرط تماس هذا المستقيم بالمنحنى م ى بمساواة مكرر كمية $\text{ص} - \text{ص}'$ للمكرر $\frac{\text{وع}'}{\text{وص}'}$ التفاضلى المستخرج من معادلة السطح المفروض يعنى انه يوجد $-\frac{\text{ط}}{\text{ى}} = \frac{\text{وع}'}{\text{وص}'}$ ومن ثم يكون

$$\text{ط} = -\,\text{ى}\,\frac{\text{وع}'}{\text{وص}'} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (٣٩)$$

واذا وضعت مقادير ح و ط المبينة بمعادلتى (٣٨) و (٣٩) فى معادلة (٣٦) التہ هذه المعادلة الى

$$-\,\text{ى}\,\frac{\text{وع}'}{\text{وس}'}(\text{س} - \text{س}') - \text{ى}\,\frac{\text{وع}'}{\text{وص}'}(\text{ص} - \text{ص}') + \text{ى}\,(\text{ع} - \text{ع}') = ٠$$

ومن هذه يستخرج

$$\text{ع} - \text{ع}' = \frac{\text{وع}'}{\text{وس}'}(\text{س} - \text{س}') + \frac{\text{وع}'}{\text{وص}'}(\text{ص} - \text{ص}') \quad (٤٠)$$

وهذه المعادلة هى معادلة المستوى المماس فى نقطة س' و ص' و ع'

فهذا المستوى يقطع السطح المنحنى المفروض فى منحنى م ح (شكل ٨) ويقطع المستوى المماس فى مستقيم م ل والمستقيم م ل يكون مماسا للمنحنى م ح والا لقطع السطح المماس السطح المنحنى

ويمكن استنتاج معادلة مستقيم م ل من معادلة (٣٦) لانه حيث كان هذا المستقيم وهو تقاطع المستوى المماس بالمستوى المار بنقطة التماس موازيا لسطح (س و ع) الاحداثى وكانت نقطة م توجد عليه فيوجد اذ ذاك بجميع نقطه ص = صَ أو ص ـ صَ = ٠ وتؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى ح (س ـ سَ) + ى (ع ـ عَ) = ٠

ولما كانت هذه المعادلة تبين النسب الواقعة بين بعدى س و ع لاية نقطة من مستقيم م ل تكون هى معادلة هذا المستقيم ويمكن وضعها هكذا

ع ـ عَ = ـ ح/ى (س ـ سَ) ٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠(٣٧)

هذا واذا امعنت النظر ظهر لك ان معادلة السطح المنحنى المفروض التى هى د(س و ص و ع) = ٠ تؤول الى معادلة منحنى م ح اذا اعتبرت فيها ص ثابتة فاذا أردنا الآن معرفة شرط تماس مستقيم م ل بمنحنى م ح نراجع (بند ٧١) ومنه نتحقق انه يجب ان يكون مكرر كمية (س ـ سَ) من معادلة (٣٧) مساويا لمقدار واعَ/واسَ المستخرج من معادلة المنحنى م ح ولا يخفى ان معادلة هذا المنحنى هى معادلة السطح معتبرا فيها ص ثابتة ومن ثم يكفى ان يؤخذ تفاضل معادلة السطح المذكور ويستخرج منها واع/واس لانه يعلم من بعد (بند ٥٢) ان الرمز واع/واس يبين أن ص اعتبرت ثابتة فى اخذ التفاضل وينتج من ذلك انه بتشكيل س و ص هكذا سَ و صَ بعد اجراء العملية يكون شرط تماس م ل بالمنحنى م ح هكذا

[illegible] = ٠ (٢٠)

فنوجد ع = [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ويعلم من ذلك ان يكون [illegible]

[illegible] (١٠) يوجد

[illegible]

[illegible]

[illegible] (ت و ت و ت) [illegible] هذه المعادلات لانها من [illegible]

تقاطع المستقيم المستدل عليه بما يوجد ايضا

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

* ٧٦ * ولنبحث عن معادلة المستوى المماس بالكرة مثلا ولذلك نرمز لاحداثيات مركزها بحروف هـ و و و ر فمعادلتها تكون

(س — هـ)^٢ + (ص — و)^٢ + (ع — ر)^٢ = نق^٢

ثم نعتبر ص ثابتة فى هذه المعادلة ونأخذ التفاضل فيوجد

٢ (س — هـ) وس + ٢ (ع — ر) وع = ٠ ومنه يحدث

وع/وس = (هـ — س)/(ع — ر) وكذا نعتبر س ثابتة ونأخذ تفاضل معادلة الكرة المذكورة فيوجد

٢ (ص — و) وص + ٢ (ع — ر) وع = ٠ ومنه يحدث

وع/وص = (و — ص)/(ع — ر) ومعادلة السطح المماس للكرة فى نقطة سَ و صَ و عَ تكون حينئذ

ع — عَ = (هـ — سَ)/(عَ — ر) (س — سَ) + (و — صَ)/(عَ — ر) (ص — صَ)

* ٧٧ * واذا كان هذا السطح يمر بنهاية القطر الرأسى يوجد

سَ = هـ و صَ = و و عَ = ر + نق وتؤول معادلة السطح فى هذه الحالة الى ع = ر + نق وهذه هى معادلة المستوى الموازى لسطح (س و ص) الاحداثى

* ٧٨ * معادلات الخط العمودى فى نقطة سَ و صَ و عَ يمكن حدوثها بالسهولة من معادلة السطح المماس وبيان ذلك ان تقول حيث انه يعلم من الهندسة التحليلية المسماة بالثلاثة ابعاد أن الشرط الواقع ليكون المستقيم الذى معادلتاه

$$\left.\begin{aligned} س &= حـ ع + ء \\ ص &= حـ_1 ع + ء_1 \end{aligned}\right\} \quad (٤١)$$

عمودا على المستوى الذى معادلته

وحدّ ثالث متبوع بكمية (سـ — ح)$^{م-٣}$ وهذا الحدّ الثالث يكون
م (م — ١) ع (سـ — ح)$^{م-٢}$ وبالسهولة يشاهد ان التفاضل يشاهد ان
كل تفاضل مستجد يحتوي على كمية سـ — ح باس كأسسها
في الحد الثاني حدث منها هذا التفاضل بلا واسطة وكل حدّ يحتوي على
سـ — ح باس اصغر من ذلك بواحد ويعلم منه انه اذا كررت التفاضلية
المولية يكون الحدّ المحتوي على أقل قوى سـ — ح هو

م ح (سـ — ح)$^{م-١}$ .... في التفاضل الاول

و م (م — ١) ع (سـ — ح)$^{م-٢}$ ...... في التفاضل الثاني

و م (م — ١) (م — ٢) ع (سـ — ح)$^{م-٣}$ في التفاضل الثالث

و م (م — ١) (م — ٢) ... ع (سـ — ح)$^{م-ن}$ في التفاضل المولى

واذن يكون المكرر التفاضلي بدرجة ن لكمية ى سـ هكذا

$$\frac{\text{وَ}^{ن}\,\text{ى سـ}}{\text{وَسـ}^{ن}} = \text{س}(\text{سـ}-\text{ح})^{م} + \text{سَ}(\text{سـ}-\text{ح})^{م-١} + \text{سً}(\text{سـ}-\text{ح})^{م-٢} + \dots$$
$$+\,\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)\cdots\text{ع}(\text{سـ}-\text{ح})^{م-ن}$$

وما ذكر في شان ى سـ يمكن تطبيقه على د سـ فيحدث منها

$$\frac{\text{وَ}^{ن}\,\text{د سـ}}{\text{وَسـ}^{ن}} = \text{ع}(\text{سـ}-\text{ح})^{ن} + \text{عَ}(\text{سـ}-\text{ح})^{ن} \cdots + \text{ن}(\text{ن}-١)\cdots(\text{سـ}-\text{ح})^{ن-ن}$$

وبقسمة هذين المكررين على بعضهما يوجد

$$\frac{\dfrac{\text{وَ}^{ن}\,\text{ى سـ}}{\text{وَسـ}^{ن}}}{\dfrac{\text{وَ}^{ن}\,\text{د سـ}}{\text{وَسـ}^{ن}}} = \frac{\text{س}(\text{سـ}-\text{ح})^{م} + \text{سَ}(\text{سـ}-\text{ح})^{م-١} \cdots\cdots + \text{م}(\text{م}-١)\cdots\cdots\text{ع}}{\text{ع}(\text{سـ}-\text{ح})^{ن} + \text{عَ}(\text{سـ}-\text{ح})^{ن-١} \cdots\cdots + \text{ن}(\text{ن}-١)\cdots\cdots\text{ك}}$$

وها ان المعادلتان هما معادلتا الخط العمودي في نقطة (سَ و صَ و عَ)

* (في الدوال التي تؤول الى $\frac{\cdot}{\cdot}$ باحد المقادير التي ياخذها المتغير) *

* ٧٩ * اذا ال كسر ككسر $\frac{د س}{د س}$ الى $\frac{\cdot}{\cdot}$ باخذ متغير س مقدارا يرمز اليه بحرف ح مثلا كان ذلك دليلا على وجود مضروب مشترك هو س — ح أو $(س - ح)^م$ على جهة العموم لكميتي الكسر المفروض واذا اسقط هذا المضروب المشترك امكن حدث المقدار الحقيقي للكسر المفروض

ولنفرض لبيان ذلك ان س — ح يكون مضروبا في د س م مرة وفي د س ن مرة (مالم يقتضي الحال الى جعل م و ن مساويين الى الوحدة او الى صفر) فيمكننا ان نضع

$$د س = ع (س - ح)^م \quad و \quad د س = ك (س - ح)^ن$$

ومنه يحدث $\frac{د س}{د س} = \frac{ع}{ك} (س - ح)^{م-ن}$ .... (٤٣)

وباخذ تفاضل المعادلة الاولى وقسمة جميع حدودها بعد ذلك على وس يوجد

$$\frac{و \cdot د س}{و س} = \frac{و ع}{و س} (س - ح)^م + م ع (س - ح)^{م-١} \quad . \quad . \quad .$$

ومن المشاهد ان مقدار $\frac{و \cdot د س}{و س}$ يتركب من حدين يحتوي احدهما على مضروب س — ح بأس اصغر من أسه في الدالة المفروضة بواحد واذا اخذ المكرر التفاضلي لكمية $\frac{و \cdot د س}{و س}$ شوهد بهذا المنوال انه يحتوي على حد متبوع بكمية $(س - ح)^م$ وحد آخر متبوع بكمية $(س - ح)^{م-١}$

وحد

وبهذا يستدل على ان معادلة (٤٣) تؤول الى صفر حين يكون م > ن
واما الحالة الثالثة وهى الاخيرة التى فيها م < ن فان جميع الحدود
تحذف فيما ماعدا حد م (م ـ ١) (م ـ ٢) … ع (س ـ ح)
بأخذ عدد التفاضلات الذى هو ن مساويا الى م ويبقى حينئذ

$$\frac{\frac{و^{ن} ى س}{و س^{ن}}}{\frac{و^{ن} ء س}{و س^{ن}}} = \frac{م (م-١)(م-٢) \cdots ع}{\cdot} = \infty$$

وهذا المقدار يدل على ان الطرف الثانى لمعادلة (٤٣) يصير غير منته
فى الحالة التى يكون فيها م < ن

* ٨١ * وتنتج هذه القاعدة مما سبق وهى متى يراد تعيين المقدار
الحقيقى لكسر $\frac{ى س}{ء س}$ الذى يصير ÷ باحد المقادير التى يأخذها المتغير
يؤخذ تفاضل كل من كميتى هذا الكسر على حدته ثم ينظر هل يؤول ناتجا
$\frac{و ى س}{و س}$ و $\frac{و ء س}{و س}$ الى صفر بالمقدار الذى يجعل $\frac{ى س}{ء س}$ آيلا الى
÷ اولا فان لا الى صفر اخذ المكرر التفاضلى لهما اى لكميتى $\frac{و^{٢} ى س}{و س}$
و $\frac{و^{٢} ء س}{و س}$ وينظر ايضا هل يؤول كل من النواتج الحادثة الى صفر
بالفرض المذكور اولا وهكذا تدام العملية فان وجد بعد جملة عمليات ناتجان
لا يؤول كل منهما الى صفر بالفرض السابق فالكسر المتكون منهما يكون هو
المقدار الحقيقى للكسر المفروض واذا آل احدهما وهو البسط الى صفر فالمقدار
الحقيقى للكسر المفروض يكون صفرا ويكون مقدار هذا الكسر غير محدود اذا

* ٨٠ * وهنا تعتبر ثلاث حالات وهى م = ن و م > ن و م < ن

ففى الحالة الاولى وهى م = ن يؤول كل من كميتى $(س - ح)^{ن-ر}$ و $(س - ح)^{ن-ر}$ الى $(س - ح)^{ن}$ اى الى الواحد اذا كان عدد التفاضلات المأخوذة وهو ر مساويا م وتؤول كميات $(س - ح)^{م}$ و $(س - ح)^{م-١}$ و $(س - ح)^{م-٢}$ ...... الخ و $(س - ح)^{ن}$ و $(س - ح)^{ن-١}$ و $(س - ح)^{ن-٢}$ ... الخ الى صفر بفرض س = ح

ويعلم من ذلك ان جميع حدود البسط والمقام تحذف ماعدا الحد الاخير من كل منهما ومعادلة (٤٤) تؤول حينئذ الى

$$\frac{\frac{و^{م} \cdot ى س}{و س^{م}}}{\frac{و^{م} \cdot د س}{و س^{م}}} = \frac{م (م-١)(م-٢) \cdots ح}{ن (ن-١)(ن-٢) \cdots ك} = \frac{ح}{ك} = \frac{ى س}{د س}$$

وفى الحالة الثانية وهى التى يكون فيها م > ن تؤول كمية $(س - ح)^{ن-ر}$ الى الواحد اذا كان عدد التفاضلات المجراة وهو ر مساويا الى ن وتكون أس س ن - ١ و ن - ٢ و ن - ٣ ... الخ و م - ١ و م - ٢ و م - ٣ ... الخ للكميات ذات الحدين الاخيرة اكبر من ن - ر فهى موجبة ويعلم من ذلك ان جميع هذه الكميات تؤول الى صفر بفرض س = ح فتحذف جميع الحدود المحتوية عليها حينئذ وتؤول معادلة (٤٤) الى

$$\frac{\frac{و^{ن} \cdot ى س}{و س^{ن}}}{\frac{و^{ن} \cdot د س}{و س^{ن}}} = \frac{(س-ح)^{ن-ر}}{ن (ن-١)(ن-٢) \cdots ك} = \frac{\cdot}{ن (ن-١)(ن-٢) \cdots ك} = \cdot$$

وبهذا

س = ٠ فيعلم من ذلك ان المقدار الحقيقي للكسر المفروض حين يفرض
س = ٠ هو لوح − لوء وكمية س − ٠ أو س
تكون هي المضروب المشترك في ذلك الكسر ولاظهار هذا المضروب
في البسط الذي هو $\text{ح}^{\text{س}} - \text{ء}^{\text{س}}$ ننظر أنه يوجد من بعد (بند ٣٧) ان

$$\text{ح}^{\text{س}} = ١ + \frac{\text{ع س}}{١} + \frac{\text{ع}^٢\text{س}^٢}{١\times٢} + \frac{\text{ع}^٣\text{س}^٣}{١\times٢\times٣} + \cdots \text{الخ}$$

$$\text{و}\quad \text{ء}^{\text{س}} = ١ + \frac{\text{عَ س}}{١} + \frac{\text{عَ}^٢\text{س}^٢}{١\times٢} + \frac{\text{عَ}^٣\text{س}^٣}{١\times٢\times٣} + \cdots \text{الخ}$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما يوجد

$$\text{ح}^{\text{س}} - \text{ء}^{\text{س}} = (\text{ع} - \text{عَ})\text{س} + \frac{(\text{ع}^٢ - \text{عَ}^٢)\text{س}^٢}{١\times٢} + \frac{(\text{ع}^٣ - \text{عَ}^٣)\text{س}^٣}{١\times٢\times٣} + \text{الخ}$$

وبهذا يشاهد وجود مضروب س في $\text{ح}^{\text{س}} - \text{ء}^{\text{س}}$

* ٨٥ * حيث ان القاعدة التي ذكرناها لايجاد المقدار الحقيقي للكسر الذي يؤول الى $\frac{٠}{٠}$ باحد المقادير التي يأخذها المتغير مؤسسة على فرضية م و ن عددين صحيحين فلا يمكن استعمالها في الحالات التي تكون فيها هاتان الكميتان كسورا اذ لا يمكن الوقوف على حد كذ س − ح يكون مرفوعا الى أس صفر ومن ثمة لا يمكن تخليص المضروب المشترك من كميتي الكسر المفروض واسقاطه منهما

ولنفرض لعمومية هذه الطريقة أن

$$\frac{\text{ك س}}{\text{د س}} = \frac{\text{ع}(\text{س} - \text{ح})^{\text{ء}} + \text{ك}(\text{س} - \text{ح})^{\text{ب}} + \text{ل}(\text{س} - \text{ح})^{\text{و}} + \cdots \text{الخ}}{\text{عَ}(\text{س} - \text{ح})^{\text{ءَ}} + \text{كَ}(\text{س} - \text{ح})^{\text{بَ}} + \text{ل}(\text{س} - \text{ح})^{\text{وَ}} + \cdots \text{الخ}}$$

وان كميات ء و ب و و ... الخ و ءَ و بَ و وَ ... الخ موجبة ومتزايدة فهذا الكسر يؤول الى $\frac{٠}{٠}$ بوضع س = ح ويمكننا ان نغير كمية س بكمية ح + هـ عوضا عن تغييرها بكمية ح فقط لكن

الى المقام وحده الى صفر

(المثال الاول)

* ٨٢ * المراد معرفة المقدار الحقيقى لكسر $\frac{\text{س}^{٣}-\text{ح}^{٣}}{(\text{س}-\text{ح})^{٤}}$ الذى يؤول الى ÷ بفرض س = ح ولذلك نأخذ تفاضل كل من كميتى هذا الكسر فيوجد $\frac{٣\text{س}^{٢}}{٤}$ وحيث ان كميتى هذا الكسر الاخير لا يؤولان الى صفر بفرض س = ح فالمقدار الحقيقى لكسر $\frac{\text{س}^{٣}-\text{ح}^{٣}}{(\text{س}-\text{ح})^{٤}}$ حين يفرض س = ح يكون $\frac{٣\text{ح}^{٢}}{٤}$ وهو المطلوب

(المثال الثانى)

* ٨٣ * لمعرفة المقدار الحقيقى لكسر $\frac{\text{س}^{٣}-٣\text{س}+٢}{\text{س}^{٤}-٦\text{س}^{٢}+٨\text{س}-٣}$ حين يفرض س = ١ الذى يجعل هذا الكسر ايلا الى ÷ يؤخذ تفاضل البسط والمقام كل منهما على حدته ثم تقسم النواتج على بعضها فيوجد $\frac{٣\text{س}^{٢}-٣}{٤\text{س}^{٣}-١٢\text{س}+٨}$ وحيث ان كلا من كميتى هذا الكسر الاخير يؤول الى صفر بالفرض السابق الذى هو س = ١ فيؤخذ التفاضل ثانيا فيحدث

$$\frac{٦\text{س}}{١٢\text{س}^{٢}-١٢}$$

ولما كان مقام هذا الكسر يؤول وحده الى صفر بفرض س = ١ علم من ذلك ان مقدار الكسر المفروض غير محدود

(المثال الثالث)

* ٨٤ * يفرض كسر $\frac{\text{ح}^{\text{س}}-\text{ى}^{\text{س}}}{\text{س}}$ الذى يؤول الى ÷ بفرض س = ٠ فيؤخذ تفاضل كل من البسط والمقام على حدته فيؤول هذا الكسر الى

$$\frac{\text{ح}^{\text{س}}\,\text{لوح}-\text{ى}^{\text{س}}\,\text{لوى}}{١}$$

وهو كسر يؤول الى لوح − لوى ولا تؤول كميتاه الى صفر بجعل

س

$\overset{.}{هـ}$ فيوجد

$$\frac{ك س}{ك س} = \frac{ع + ح هـ^{ب-د} + ل هـ^{و-د} + \cdots الخ}{خ + ك هـ^{د} + ل هـ^{ي-د} + \cdots}$$

ويشاهد أن فرضية هـ = ٠ تجعل هذه المعادلة آيلة الى

$$\frac{ك س}{ك س} = \frac{ع}{٠} = \infty$$

٨٦ • ولنأخذ هذا الكسر $\frac{(س^{٢} - ٣ حـ س + ٢ حـ)^{\frac{٢}{٣}}}{(س^{٢} - حـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$ الذي

يؤول الى $\frac{٠}{٠}$ بجعل س = حـ مثلا فنضع حـ + هـ محل س فيه فيتحول الى

$$\frac{(هـ^{٢} - حـ هـ)^{\frac{٢}{٣}}}{(٣ حـ^{٢} هـ + ٣ حـ هـ^{٢} + هـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}} = \frac{(هـ - حـ)^{\frac{٢}{٣}} هـ^{\frac{٢}{٣}}}{(٣ حـ^{٢} + ٢ حـ هـ + هـ^{٢})^{\frac{١}{٢}} هـ^{\frac{١}{٢}}}$$

$$= \frac{(هـ - حـ)^{\frac{٢}{٣}} هـ^{\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٢}}}{(٣ حـ^{٢} + ٣ حـ هـ + هـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}} = \frac{(هـ - حـ)^{\frac{٢}{٣}} هـ^{\frac{١}{٦}}}{(٣ حـ^{٢} + ٣ حـ هـ + هـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$$

ثم نجعل هـ = ٠ فيوجد

$$\frac{ك س}{ك س} = \frac{٠}{(٣ حـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}} = ٠$$

٨٧ • اذا جعل أحد مقادير س كميتي كسر $\frac{ك س}{ك س}$ غير محدودتين تقسم هاتان الكميتان على ك س × ك س فيؤول هذا الكسر الى

$$\frac{ك س}{ك س} = \frac{\frac{١}{ك س}}{\frac{١}{ك س}} = \frac{٠}{٠}$$

بعد انتهاء العملية نفرض هـ = ٠ والناتج الحادث يكون كالناتج من تغيير س بكمية ح من اول وهلة ونجد حينئذ

$$\frac{دس'}{دس} = \frac{ح هـ^{د} + ك هـ^{ب} + ل هـ^{و} + \cdots الخ}{ح' هـ^{د'} + ك' هـ^{ب'} + ل' هـ^{و'} + \cdots الخ} \cdots (٤٥)$$

وباعتبار كون د و د' يكونان اصغر الاسس الداخلة فى هاتين المتسلسلتين يمكن وقوع هذه الثلاث حالات

$$د > د' \quad و \quad د = د' \quad و \quad د < د'$$

ففى الحالة الاولى اذا قسمت كيتا كسر (٤٥) على هـ$^{د'}$ يحدث

$$\frac{دس'}{دس} = \frac{ح هـ^{د-د'} + ك هـ^{ب-د'} + ل هـ^{و-د'} \cdots الخ}{ح' + ك' هـ^{ب'-د'} + ل' هـ^{و'-د'} + \cdots الخ} \cdots\cdots (٤٦)$$

وحيث ان د > د' فرضا فعدد د ــ د' يكون موجبا ومن باب اولى تكون كميات ب ــ د' و و ــ د' ... الخ و ب' ــ د' و و' ــ د' ... الخ موجبة كذلك لان د و ب و و ... الخ و د' و ب' و و' ... الخ متزايدة واذا جعلنا الآن هـ = ٠ انحذفت جميع حدود الطرف الثانى لمعادلة (٤٦) ماعدا ح' ويعلم من ذلك ان هذه المعادلة تؤول الى

$$\frac{دس'}{دس} = \frac{٠}{ح'} = ٠$$

وفى الحالة الثانية وهى التى يكون فيها د = د' يؤول حد ح هـ$^{د-د'}$ الى ح هـ^{٠} = ح ويعلم من ذلك انه حين يجعل س = ح تؤول معادلة (٤٦) الى $\frac{ح}{ح'}$

وفى الحالة الثالثة وهى التى فيها د < د' تقسم كيتا كسر (٤٥) على

هـ^{د}

بحسب الارادة ويعلم من ذلك انه يمكن اعطاء كمية هـ مقدارا بحيث يكون ذلك الجزء اصغر من كمية $\frac{\text{و صـ}}{\text{و سـ}}$ التى ليست محتوية على هـ ولتكن ع

ومن المايؤول اليه حاصل جمع $\frac{\text{و}^{٢}\text{صـ}}{\text{و سـ}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}}{٢}+\frac{\text{و}^{٣}\text{صـ}}{\text{و سـ}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{٢\times٣}+$ الخ

فى هذه الحالة فتؤول متسلسلة (٤٧) الى

$$\left(\frac{\text{و صـ}}{\text{و سـ}}+\text{ع}\right)\text{هـ}$$

وحيث انه يوجد

$$\frac{\text{و صـ}}{\text{و سـ}} > \text{ع}$$

فبضرب الطرفين فى هـ يحدث

$$\frac{\text{و صـ}}{\text{و سـ}}\,\text{هـ} > \text{ع هـ}$$

او

$$\frac{\text{و صـ}}{\text{و سـ}}\,\text{هـ} > \left(\frac{\text{و}^{٢}\text{صـ}}{\text{و سـ}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}}{٢}+\frac{\text{و}^{٣}\text{صـ}}{\text{و سـ}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{٢\times٣}+\text{الخ}\right)\text{هـ}$$

او

$$\frac{\text{و صـ}}{\text{و سـ}}\,\text{هـ} > \frac{\text{و}^{٢}\text{صـ}}{\text{و سـ}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{٢}+\frac{\text{و}^{٣}\text{صـ}}{\text{و سـ}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٣}}{٢\times٣}+\text{الخ}$$

وهذا ما اردنا اثباته وبمثله يبرهن على اى حد بالنسبة لجميع ما يليه

٩٠ لتكن صـ = د سـ معادلة بمتغيرين فيمكن دائما اعتبار هذه المعادلة كمعادلة منحن رأسياته هى مقادير المختلفة للدالة صـ ويقال ان دالة صـ هذه فى نهايتها الصغرى متى مالت للزيادة بعد تناقصها شيأ فشيأ ومثاله منحنى م ب ت (شكل ٩) الذى معادلته صـ = حـ + د سـ٢ فانه يشاهد ان رأسياته التى هى م ع و م َ ع َ ... الخ تأخذ فى النقصان الى نقطة بـ ومن ابتداء هذه النقطة تأخذ الرأسيات ك د و ك َ د َ ... الخ فى الزيادة وعلى هذا يكون الرأسى ا بـ هو النهاية الصغرى للدالة صـ

ثم تجرى عليه العمليات اللازمة لمعرفة مقداره الحقيقى حيث انه قد آل الى $\frac{٠}{٠}$

* ٨٨ * وبالجملة متى جعل فرض $س = ٠$ احد مضروبى حاصل ضرب $م ن$ آيلا الى صفر وجعل المضروب الآخر غير متناه واريد معرفة المقدار الحقيقى لهذا الحاصل يحوّل الحاصل المذكور الى صورة كسر بالكيفية الآتية وهى ان يفرض اولا أن حاصل الضرب المفروض يكون $م \times ن$ وان مضروب $م$ هو الذى يصير صفرا بفرض $س = ٠$ ومضروب $ن$ يصير غير متناه ثم يوضع هذا الحاصل هكذا

$$م \times ن = \frac{م}{\frac{١}{ن}}$$

ولما كان فرض $س = ٠$ يجعل مضروب $ن$ غير متناه لزم ان يكون $\frac{١}{ن} = ٠$ ويؤول حاصل الضرب السابق حينئذ الى $\frac{٠}{٠}$ فتجرى عليه العملية السابقة

(فى النهايات الكبرى والصغرى للدوال التى بمتغير واحد)

* ٨٩ * يمكن اعطاء كمية $هـ$ فى متسلسلة تيلور مقدارا بحيث يصير اى حد يراد من حدودها اكبر من حاصل جمع الحدود التى تليه ولبيان ذلك نكتب المتسلسلة وهى

$$ص + \frac{وص}{وس}هـ + \frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}\frac{هـ^{٢}}{٢} + \frac{و^{٣}ص}{وس^{٣}}\frac{هـ^{٣}}{٢\times٣} + \text{الخ}$$

ونقول اذا اردنا ان يكون حد $\frac{وص}{وس}هـ$ مثلا اكبر من حاصل جمع الحدود التى تليه نضع جزء المتسلسلة المعدّ من ابتداء هذا الحد هكذا

$$\left(\frac{وص}{وس} + \frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}\frac{هـ}{٢} + \frac{و^{٣}ص}{وس^{٣}}\frac{هـ^{٢}}{٢\times٣} + \text{الخ}\right)هـ \quad \ldots (٤٧)$$

لكنه بفرض $هـ = ٠$ ينعدم جزء $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}\frac{هـ}{٢} + \frac{و^{٣}ص}{وس^{٣}}\frac{هـ^{٢}}{٢\times٣} + \text{الخ}$

فمن ثمة يمكن اخذ كمية $هـ$ صغيرة جدا بتقاربها من صفر ليصير هذا الجزء صغيرا

بحسب

د(س + هـ) [illegible] د س ، د(س − هـ) [illegible] د س

وبالعكس اذا كان [illegible] (شكل ١٣) نهاية صغرى [illegible] س [illegible]
ان الشروط [illegible] الشروط [illegible]
[illegible] نهاية صغرى [illegible]

[illegible]

د(س + هـ) [illegible] د س ، د(س − هـ) [illegible] د س

ويعلم من ذلك انه متى تكون [illegible] د(س + هـ) ، د(س − هـ)
معا صغر من د س يوجد للمنحنى نهاية كبرى ومتى [illegible] معا اكبر منها
يوجد للمنحنى نهاية صغرى واذا كانت احدى [illegible] اكبر و الاخرى
اصغر من د س فلا يوجد نهاية [illegible] ولا صغرى

* ٩٥ * ونبحث عن هذه الشروط في [illegible] حالات [illegible]
المعلوم انه يوجد من قضية تيلور

$$د(س+هـ) = ص + \frac{دَص}{دس}\,هـ + \frac{دً ص}{دس^{2}}\,\frac{هـ^{2}}{2} + \frac{د^{3}ص}{دس^{3}}\,\frac{هـ^{3}}{2\times 3} + \text{الخ} \quad \ldots (8$$

وبتغيير + هـ بكمية − هـ في هذا الدستور يحدث

$$د(س-هـ) = ص - \frac{دَص}{دس}\,هـ + \frac{دً ص}{دس^{2}}\,\frac{هـ^{2}}{2} - \frac{د^{3}ص}{دس^{3}}\,\frac{هـ^{3}}{2\times 3} + \text{الخ} \quad \ldots (9$$

ولاجل ان تكون ص = د س نهاية كبرى [illegible] كون
هذان [illegible] معا [illegible] من ص [illegible] ان لا يقع [illegible]
الا اذا كان $\frac{دَص}{دس}$ [illegible] $\frac{دَص}{دس}$ = ٠

امكن ان يعطى الى كمية هـ مقدارا بحيث يكون $\frac{دَص}{دس}$ هـ [illegible]
حاصل الجمع الجبري للحدود التي تليه في كل من متسلسلتين [illegible] اشارة

• ٩١ • ويقال ايضا ان الدالة صـ أتت الى نهايتها الكبرى متى انتهت بعد تزييدها فى نقطة تأخذ فى النقص من ابتدائها ويكفيك (شكل ١٠) مثلا فرأسيات منحنى حدو الذى معادلته صـ = هـ ـ دسـ ٢ تنسب اليه تأخذ فى النقص من ابتداء نقطة د من الجانبين فرأسى اد فيه هو النهاية الكبرى للدالة صـ

• ٩٢ • وهنا منحنيات ليس لها الا نهاية كبرى فقط ومنحنيات ليس لها الا نهاية صغرى ومنحنيات فيها النهايتان ومنحنيات ليس لها نهايات بالكلية فان منحنى مـ ـ (شكل ٩) الذى معادلته صـ = حـ + دسـ٢ لا توجد له نهاية كبرى لانه يعلم من بعد معادلته ان رأسياته تاخذ فى التزايد ابدا

ودائرة حـ ى (شكل ١١) التى معادلتها نق٢ = (صـ ـ هـ)٢ + (سـ ـ و)٢ توجد لها النهايتان الكبرى والصغرى متحدتين فى افق اح واكبر هاتين النهايتين ىح واصغرهما ـح

• ٩٣ • متى توجد نهاية كبرى اوصغرى للدالة صـ التى يتغير واحد منه سـ فتتعين هذه النهاية اذا علم الافق الموافق لها لانه اذا علم مقدار سـ الموافق لنهاية كبرى او صغرى للمنحنى المستدل عليه بمعادلة صـ = دسـ وكان ذلك المقدار حـ مثلا يكفى ان تجعل سـ = حـ فى معادلة صـ = دسـ ليكون مقدار صـ الحادث منها هو النهاية الكبرى او الصغرى المطلوبة

• ٩٤ • وليكن صـ = دسـ رأسى هو مح (شكل ١٢) ويكون فى نهايته الكبرى فاذا اخذ أفق اح زيادة هـ المتبينة بخط حح َ وقطع حح ً = هـ ايضا فالشروط الواقعة ليكون حم نهاية كبرى تكون

حَ مَ < حم و حً مً < حم. أو .

تكون اكبر من $\frac{و ص}{و س}$ وتكون $\frac{و ص}{و س}$ في هذه الحالة نهاية صغرى وكذا اذا كان $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ سالبا شوهد ان $\frac{و ص}{و س}$ تكون نهاية كبرى

* ٩٦ * ويتم هذه القضية تنبيه وقد يكون $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ صفرا مع

وجود $\frac{و ص}{و س} = ٠$

وفي هذه الحالة لا توجد نهاية كبرى ولا صغرى الا اذا كان $\frac{و^3 ص}{و س^3} = ٠$

ايضا لان اشارة الحدود التي تلي ص تكون عند ذلك متعلقة باشارة $\frac{و^4 ص}{و س^4}$ حين تؤخذ هـ صغيرة جدا ويثبت انه اذا كان $\frac{و^4 ص}{و س^4}$ موجبا تكون $\frac{و ص}{و س}$ نهاية صغرى واذا كان سالبا تكون نهاية كبرى وهلم جرا

وعلى العموم متى يكون المكرر التفاضلي الاول الذي لم يحذف بدرجة مزدوجة فانه يوجد نهاية صغرى اذا كان موجبا ونهاية كبرى اذا كان سالبا

(المثال الاول)

* ٩٧ * لمعرفة نهايات هذه الدالة $ح - ٤ س + س^2$ نضع

اولا $ص = ح - ٤ س + س^2$

ثم نأخذ التفاضل ونقسم على $و س$ فيحدث

$$\frac{و ص}{و س} = - ٤ + ٢ س$$

$$\frac{و^2 ص}{و س^2} = ٢$$

وبايجاب مقدار $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ يستدل على انه يوجد للدالة المفروضة نهاية صغرى

حد $\frac{وَصـ}{وَسـ}$ هـ وحده كاشارة نتائج من ارتباطه بجميع الحدود التي تليه اذ ان هذا الحد مرجبا في احد حلى (٤٨) و (٤٩) فتنتئ الحل كبر من صـ ويكون اصغر من صـ اذا كان الحد المذكور وهو $\frac{وَصـ}{وَسـ}$ هـ سلبيا وحيث ان اشارة حد $\frac{وَصـ}{وَسـ}$ هـ متعاكسة في هذين الحدين موجبة في احدهما وسالبة في الآخر فينتج من ذلك انه لا يدون تكون احدى كميتي ق(سـ + هـ) و ق(سـ ــ هـ) اكبر من ق سـ والاخرى اصغر

ويظهر من هذا انه اذا لم يكن $\frac{وَصـ}{وَسـ}$ صفرا فلا توجد نهاية كبرى ولاصغرى اما اذا كان $\frac{وَصـ}{وَسـ}$ = ٠ اذن حلى (٤٨) و (٤٩) يؤولان حينئذ الى

$$ق(سـ + هـ) = صـ + \frac{وَ^٢صـ}{وَسـ^٢} \cdot \frac{هـ^٢}{٢} + \frac{وَ^٣صـ}{وَسـ^٣} \cdot \frac{هـ^٣}{٢ \times ٣} + \cdots \text{الخ}$$

$$ق(سـ - هـ) = صـ + \frac{وَ^٢صـ}{وَسـ^٢} \cdot \frac{هـ^٢}{٢} - \frac{وَ^٣صـ}{وَسـ^٣} \cdot \frac{هـ^٣}{٢ \times ٣} + \cdots \text{الخ}$$

واشارة الحدود التي تلي صـ تتعلق في هذه الحالة باشارة $\frac{وَ^٢صـ}{وَسـ^٢}$ اذا اخذت كمية هـ مقدارا صغيرا كافيا لان يكون $\frac{وَ^٢صـ}{وَسـ^٢}$ هـ اكبر من حاصل الجمع الجبري للحدود الآتية بعده وحيث ان اشارة $\frac{وَ^٢صـ}{وَسـ^٢}$ متحدة في الحلين فاذا كانت هذه الاشارة هي الزائد فدالتا (سـ + هـ) و (سـ ــ هـ) تكونان

واذا وضعنا مقدارى س فى مقدار $\frac{و^٢ص}{و س^٢}$ على التوالى بدلا عن

س يوجد $\frac{و^٢ص}{و س^٢}$ = ... ٦ حـ و $\frac{و^٢ص}{و س^٢}$ = - ٦ حـ

وبهذا يستدل على انه يوجد نهاية مفروضة نهاية صغرى موافقة الى ان

س = + $\frac{١}{٣}$ $\sqrt{٣}$ ونهاية كبرى موافقة الى ان س = - $\frac{١}{٣}$ $\sqrt{٣}$

وبوضع هذه المقادير فى مقدار ص يوجد اولا ص = هـ^٢ - $\frac{٢}{٩}$ $\sqrt{٣}$

وهو مقدار النهاية الصغرى ويوجد ثانيا ص = هـ^٢ + $\frac{٢}{٩}$ $\sqrt{٣}$

وهو مقدار النهاية الكبرى

(تطبيق نظر النهايات على حل جملة مسائل)

(المسئلة الاولى)

* ١٠٠ * لنا ان نقسم عددا مفروضا الى قسمين بشرط ان يكون

حاصل ضربهما اعظم ما يمكن

ولاجل ذلك نفرض العدد حـ واحد القسمين نفرض بين س فالقسم

الآخر يكون حـ - س وكمية س(حـ - س) تكون هى الكمية التى

يراد معرفة نهايتها الكبرى فنضع

ص = س(حـ - س) ثم نأخذ التفاضل ونقسم على وس فيوجد

$\frac{وص}{وس}$ = حـ - ٢ س و $\frac{و^٢ص}{و س^٢}$ = - ٢

وحيث ان $\frac{و^٢ص}{و س^٢}$ سالب فيتحقق انه يوجد نهاية كبرى بخلاف ما اذا كان

هذا المقدار موجبا فان المسئلة تكون غير ممكنة ثم انه بمساواة مقدار $\frac{وص}{وس}$

بصفر يحدث منه س = $\frac{حـ}{٢}$ ويعلم من ذلك انه يجب قسمة العدد المفروض

قسمين متساويين ليكون حاصل ضربهما اعظم ما يمكن او نهاية كبرى

وتعيين الافق الموافق لهذه النهاية نساوي مقدار $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ بصفر فيحدث

منه س = [illegible] واذا وضع هذا المقدار في مقدار ص بدلا عن س

حيث ص = ح − [illegible] وهذا المقدار هو مقدار النهاية الصغرى المطلوبة

(المثال الثاني)

* ٩٨ * لتكن $\text{ح}^{٤} + \text{ء}^{٣}\text{س} - \text{هـ}^{٢}\text{س}^{٢}$ كمية يراد معرفة نهايتها فنضع

$\text{ص} = \text{ح}^{٤} + \text{ء}^{٣}\text{س} - \text{هـ}^{٢}\text{س}^{٢}$ ثم نأخذ التفاضل ونقسم على وس فنجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ء}^{٣} - ٢\text{هـ}^{٢}\text{س} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} = -٢\text{هـ}^{٢}$$

وحيث ان $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ سالب فيوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى يستخرج

الافق الموافق لها من معادلة $\text{ء}^{٣} - ٢\text{هـ}^{٢}\text{س} = ٠$ فيوجد

$\text{س} = \frac{\text{ء}^{٣}}{٢\text{هـ}^{٢}}$ وبوضع هذا المقدار في مقدار ص بدلا عن س يوجد

$\text{ص} = \text{ح}^{٤} + \frac{\text{ء}^{٦}}{٤\text{هـ}^{٢}}$ وهو مقدار النهاية الكبرى المراد ايجادها

(المثال الثالث)

* ٩٩ * لتكن ايضا معادلة $\text{ص} = ٣\text{ح}^{٢}\text{س}^{٣} - \text{ء}^{٤}\text{س} + \text{هـ}^{٥}$

فنأخذ التفاضل ونقسم على وس فنجد كما تقدم

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = ٩\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} - \text{ء}^{٤} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} = ١٨\,\text{ح}^{٢}\text{س}$$

ثم نساوي مقدار المكرر التفاضلي $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ بصفر فيوجد

$٩\text{ح}^{٢}\text{س}^{٢} - \text{ء}^{٤} = ٠$ ومنه يستخرج

$$\text{س} = \pm \frac{\text{ء}^{٢}}{٣\text{ح}}$$

واذا

$٢ ح س - ٣ س^٢ = ٠$ ومنها يخرج

$س = ٠$ و $س = \frac{٢ح}{٣}$

فمقدار $س = ٠$ لا يؤدي الى نهاية كبرى لان $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ يؤول به الى $٢ ط ح^٢$ وهو عدد موجب فيوافق حينئذ الى نهاية صغرى وبالحقيقة متى يفرض $س = ٠$ تؤول الاسطوانة الى مخروط (فانه كلما ارتفعت الاسطوانة قل ثخن جسمها) ومقدار $س = \frac{٢ح}{٣}$ يكون هو الموافق للمسئلة وحده لان مقدار $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ يؤول به الى $-٢ط ح$ وهو عدد سالب فاذا طرح $ع وَ = س = \frac{٢}{٣} ع و$ من ارتفاع المخروط بقي $وَ = \frac{١}{٣} ع و$ ويعلم من ذلك ان حجم الاسطوانات الممكن رسمها داخل مخروط قائم ما كان ارتفاعها ثلث ارتفاع ذلك المخروط

(المسئلة الثالثة)

* ١٠٢ * لنا ان نقسم مستقيم اب (شكل ١٥) الى قسمين اح و حب بشرط ان يكون حاصل ضرب اح × $حب^٣$ نهاية كبرى ولذلك نرمز بحرف ح لخط اب الكلي وبحرف س لقسم حب فالمعادلة التي ينتهي اليها يؤخذ تفاضلها تكون

$ص = س^٣ (ح - س)$ ثم يوجد باخذ التفاضل والقسمة على $و س$

$$\frac{و ص}{و س} = ٣ ح س^٢ - ٤ س^٣ ،$$

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = ٦ ح س - ١٢ س^٢$$

وبمساواة مقدار $\frac{و ص}{و س}$ بصفر يخرج منه $س^٢ = ٠$ او $س = \frac{٣ح}{٤}$

(المسألة الثانية)

* ١٠١ * لنا ان نعين اعظم الاسطوانات الممكن رسمها داخل مخروط قائم

ولنرمز لخط ع و الذى هو ارتفاع المخروط (شكل ١٤) بحرف ح ونرمز بحرف د لخط او الذى هو نصف قطر القاعدة ثم نرمز بحرف س لخط ع دَ الذى هو بعد رأس المخروط عن مركز الدائرة العليا للاسطوانة فيحدث من تشابه مثلثى ع ا و و ع هـ دَ هذه المناسبة

ع و : ا و :: ع دَ : هـ دَ أو

ح : د :: س : هـ دَ ومنها يحدث

$$\text{هـ دَ} = \frac{\text{د س}}{\text{ح}}$$

ولنفرض ان ط تكون نسبة القطر الى محيطه فمساحة دائرة هـ ع ف التى نصف قطرها يساوى $\frac{\text{د س}}{\text{ح}}$ تكون $\frac{\text{ط د}^{2}\text{ س}^{2}}{\text{ح}^{2}}$ وبضرب هذه المساحة فى ارتفاع الاسطوانة الذى هو ح − س يحدث حجم تلك الاسطوانة ويكون ذلك الحجم $\frac{\text{ط د}^{2}\text{ س}^{2}}{\text{ح}^{2}}(\text{ح} - \text{س})$ وهذه الكمية تكون هى التى يراد ايجاد نهايتها الكبرى فنساويها بحرف ص ليحدث

$\text{ص} = \frac{\text{ط د}^{2}\text{ س}^{2}}{\text{ح}^{2}}(\text{ح} - \text{س})$ ثم نأخذ التفاضل ونقسم على و س فيوجد

$$\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = \frac{\text{ط د}^{2}}{\text{ح}^{2}}(\text{٢ ح س} - \text{٣ س}^{2}) \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و س}^{2}} = \frac{\text{ط د}^{2}}{\text{ح}^{2}}(\text{٢ ح} - \text{٦ س})$$

وبمساواة مقدار $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ بصفر يوجد

$$\frac{\text{ط د}^{2}}{\text{ح}^{2}}(\text{٢ ح س} - \text{٣ س}^{2}) = \text{٠} \quad \text{أو}$$

٢ ح س

وصرف من الارتفاع في محيط القاعدة الذي هو ٢ ط س يوجد

$\frac{ع}{ط س^2} \times ٢ ط س = ٢ع$ [illegible]

وهذا الحاصل هو مساحة سطح جانب الاسطوانة فاذا اضيف عليه كمية

ط س² التي هي مساحة قاعدة الاسطوانة [illegible]

$\frac{٢ع}{س}$ + ط س² ولهذه الكمية [illegible] نهاية [illegible] معروفة [illegible]

وضع لاجل ذلك

$ص = \frac{٢ع}{س} + ط س^2$ فيحدث منه

$\frac{وص}{وس} = -\frac{٢ع}{س^2} + ٢ ط س$ و

$\frac{و^2ص}{وس^2} = \frac{٤ع}{س^3} + ٢ ط$

ثم ساوي مقدار $\frac{وص}{وس}$ بصفر يحدث منه

$س = \sqrt[3]{\frac{ع}{ط}}$

وحيث ان هذا المقدار يوافق نهاية صغرى لانه يجعل $\frac{و^2ص}{وس^2}$ موجبا يعلم

من ذلك ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة المطلوبة يساوي $\sqrt[3]{\frac{ع}{ط}}$ واذا وضع

هذا المقدار في كمية [illegible] مقدار الارتفاع يوجد

ارتفاع الاسطوانة $= \frac{ع}{ط س^2} = \frac{ع}{ط \sqrt[3]{\frac{ع^2}{ط^2}}} = \sqrt[3]{\frac{ع}{ط}}$

ويجري هذه المسئلة في عمل المدافع لانه [illegible]

[illegible]

ومقدار س الذى يكون صفرا هو الذى يوافق المسئلة فقط لان مقدار $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}$ يؤول به الى حساب سالب وهو $-\frac{\text{٩ح}^{٢}}{\text{٤}}$

* ١٠٣ * ولينتبه انه متى يوجد مضروب ثابت موجب فى مقدار مقدار $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ الاصلى يمكن اسقاط هذا المضروب لانه اذا وجدنا $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ = ح دس استخرجنا منه $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}} = \text{ح} \frac{\text{و دس}}{\text{و س}}$ وحيث كانت هذه المعادلة الاخيرة لا تفيدنا الا بيان اشارة مقدار $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}$ وهذه الاشارة لا تتعلق الا باشارة $\frac{\text{و دس}}{\text{و س}}$ لان ح مضروب ثابت موجب علم من ذلك انه يمكن اسقاط مضروب ح من هذه المعادلة وكذا يمكن اسقاطه من معادلة $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ = ح دس لانه حيث كان اللازم مساواة الطرف الثانى لهذه المعادلة بصفر لنستخرج منها س فمعادلة ح دس = ٠ تحدث دس = ٠ وينتج من ذلك انه يمكن اسقاط الثابتة

(المسئلة الرابعة)

* ١٠٤ * المراد تعيين الاناء الاسطوانى الذى يسع كمية معلومة الحجم من الماء ويكون سطحه الداخلى اصغر ما يمكن ولذلك نرمز لحجم الماء المعلوم بحرف ح ولنصف قطر قاعدة الاسطوانة بحرف س فكمية ط س^{٢} تكون هى مساحة قاعدة هذه الاسطوانة وحيث انه بضرب الارتفاع فى مساحة القاعدة يحدث حجم الاسطوانة يوجد

ارتفاع الاسطوانة × ط س^{٢} = ح ومنه يستخرج

ارتفاع الاسطوانة = $\frac{\text{ح}}{\text{ط س}^{٢}}$

وبضرب

ثم يجرى التفاضل بناء على (بند ١٠٣) فيكون

$$\frac{و صـ}{و سـ} = \frac{٤ح^٢ سـ - ٣ح سـ^٢}{\sqrt{٤ح^٢ سـ^٢ - ٢ح سـ^٣}}$$ وباسقاط مضروب سـ المشترك

يكون

$$\frac{و صـ}{و سـ} = \frac{٤ح^٢ - ٣ح سـ}{\sqrt{٤ح^٢ - ٢ح سـ}} \quad \cdots\cdots \quad (٥٠)$$

ولاجل ان يكون هذا المقدار مساويا الى صفر يوضع

$$٤ح^٢ - ٣ح سـ = ٠$$ فيستخرج منه

$$سـ = \frac{٤ح}{٣}$$

وهذا المقدار يوافق نهاية كبرى لانه يجعل $\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢}$ سالبا

* ١٠٦ * وقبل البحث عن تعيين مقدار $\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢}$ نشرح طريقة يختصر بها الحساب فى بعض الحالات وليتأمل اولا انه اذا آلت دالة لكمية سـ الى صفر بمقدار أخذه متغير سـ فلا يلزم منه ان يكون مكررها التفاضلى صفرا ايضا فان المكرر التفاضلى $٢سـ - ٥$ للدالة $سـ^٢ - ٥سـ + ٦$ التى تؤول الى صفر بفرض $سـ = ٢$ أو $سـ = ٣$ لا يؤول الى صفر بهذه الفروضات.

* ١٠٧ * قد يمكن فى بعض الاوقات اختصار العمليات المستعملة لمعرفة هل يوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى او نهاية صغرى لاننا اذا فرضنا انه يراد تعيين المكرر التفاضلى لمعادلة $\frac{و صـ}{و سـ} = سَـ_١ \times سَـ_٢$ التى فيها $سَـ_١$ و $سَـ_٢$ دوال لمتغير سـ واحداهما وهى $سَـ_١$ تؤول الى صفر ببعض المقادير التى ياخذها متغير سـ وأخذنا تفاضل هذه المعادلة كما فى

المعلوم مقدار من البارود والمراد معرفة الاتساع اللازم لهاون ذى خزنة اسطوانية يكون فعل قوة البارود على حائط هذه الخزنة اصغر ما يكون وينظر ان هذه المسئلة تؤول الى تعيين اصغر السطوح التى تأخذها الخزنة وبالنظر الى ما سبق يعلم انه ينبغى ان يكون نصف قطر قاعدتها مساويا الى ارتفاعها

(المسئلة الخامسة)

* ١٠٥ * نريد أن نرسم مخروطا داخل كرة بشرط ان يكون سطحه المحدب اكبر ما يكون بالنسبة للمخاريط الممكن رسمها داخل هذه الكرة ولنفرض ان نصف دائرة امب (شكل ١٦) تدور حول محور اب فيحدث وتر ام فى هذه الدورة مخروطا ارتفاعه اع ونصف قطر قاعدته مع ومساحة السطح المحدب لهذا المخروط تكون مساوية الى

محيط ع م × ½ ام = ٢ ط ع م × ½ ام = ط ع م × ام

فنريد الآن تعيين ع م و ام ولذلك نفرض ان اب = ٢ ح و اع = س فيحدث من توسط ع م فى التناسب بين اع و ب ع هذه المتناسبة

س : م ع :: م ع : ٢ ح ــ س ومنها يحدث

م ع = $\sqrt{}$ ٢ ح س ــ س^2

وكذا من توسط ام فى النسبة بين اع و اب يوجد

س : ام :: ام : ٢ ح ويحدث من ذلك

ام = $\sqrt{}$ ٢ ح س

وبوضع هذه المقادير عوضا عن م ع و ام فى الكمية التى تبين السطح المحدب للمخروط يوجد

السطح المحدب للمخروط = ط $\sqrt{}$ ٢ ح س ــ س^2 $\sqrt{}$ ٢ ح س = ط $\sqrt{}$ ٤ ح^2 س^2 ــ ٢ ح س^3

وبالرمز بحرف ص لهذه الكمية يكون

ص = ط $\sqrt{}$ ٤ ح^2 س^2 ــ ٢ ح س^3

ثم

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\text{س}^2} = \frac{1}{\text{[illegible]}} \times \frac{\text{و}(\text{[illegible]})}{\text{و}\text{س}} = \text{[illegible]}\frac{1}{\sqrt{\text{س}}}$$

٩٠ [illegible] استخراج $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ [illegible] فى حالة فرضية $\text{س} = \frac{٤}{٣}\text{ح}$ [illegible] بالنسبة الى [illegible] فيوجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{ح س}(٤\text{ح} - ٣\text{س})}{\sqrt{٤\text{ح}^2\text{س}^2 - ٢\text{ح}\text{س}^3}} \text{ و}$$

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\text{س}^2} = \frac{\text{ح س}}{\sqrt{٤\text{ح}^2\text{س}^2 - ٢\text{ح}\text{س}^3}} \times (٤\text{ح} - ٣\text{س})$$

ثم نقول حيث ان مضروب $(٤\text{ح} - ٣\text{س})$ يساوى صفرا فى هذه الحالة يوجد من بعد (بند ١٠٧)

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\text{س}^2} = \frac{\text{ح س}}{\sqrt{٤\text{ح}^2\text{س}^2 - ٢\text{ح}\text{س}^3}} \times \frac{\text{و}(٤\text{ح} - ٣\text{س})}{\text{و}\text{س}}$$

$$= - \frac{٣\text{ح س}}{\sqrt{٤\text{ح}^2\text{س}^2 - ٢\text{ح}\text{س}^3}}$$

واذا قسم بسط ومقام هذا الكسر الاخير على س يحدث

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\text{س}^2} = - \frac{٣\text{ح}}{\sqrt{٤\text{ح}^2 - ٢\text{ح س}}}$$ ثم يحدث بوضع مقدار س الذى هو $\frac{٤}{٣}\text{ح}$ عوضا عنه

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{و}\text{س}^2} = - \frac{٣\text{ح}}{\sqrt{٤\text{ح}^2 - \frac{٨}{٣}\text{ح}^2}} = - \frac{٣\text{ح}}{\sqrt{\frac{٤}{٣}\text{ح}^2}}$$

وحيث ان هذا المقدار سالب فيوافق مقدار س النهاية كبرى

(المسألة السادسة)

(بند ١٤) وبمقتضى و س يوجد

$$\frac{و ص}{و ع} = \frac{س و ا}{و س} + \frac{ا و س}{و س}$$

وحيث ان س تؤول الى صفر بالمقدار الذى تأخذه كمية س فتؤول

تلك المعادلة الى $\frac{و ص}{و ع} = \frac{س و ا}{و س}$ ويفهم من ذلك انه لايجاد

$\frac{و ص}{و ع}$ يلزم ضرب المكتر التفاضلى للمضروب الذى يصير صفر

فى المضروب الآخر [وهذه القاعدة ليست خالية عن العوارض فان $\frac{و ا}{و س}$

قد يكون صفرا ايضا ومثله معادلة $\frac{و ص}{و س} = س^2 (س - ح)^2$ التى

تحتوى على جذور متساوية فان حدى مقدار $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ فيهما يصيران اصفارا

ويجب بحث عن المكترات التفاضلية التى بدرجة عليا حينئذ عوضا عن

اسقاط المضروب لمتبين برمز س $\frac{و ا س}{و س}$ كما فى (بند ٩٦) ليعرف

هل يوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى اونهاية صغرى واذا صار $\frac{و ا س}{و س}$

غير محدود فقد آل الامر الى حالة (بند ٨٧)]

* ١٠٨ * واذا أردنا مثلا معرفة المكتر التفاضلى بدرجة ثانية الى

$\frac{و ص}{و س} = \frac{س - ح}{\sqrt{س}}$ بفرض س = ح نضع المعادلة اولا هكذا

$\frac{و ص}{و س} = \frac{1}{\sqrt{س}} \times (س - ح)$ ويوجد من بعد البند المتقدم

$$\text{و}'\text{ص} = \frac{(\text{ح}+\text{س})\,\text{س}\,\text{و}'\text{س}}{\text{س}\sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2}} + \sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2}\times-\frac{\text{ح}\,\text{و}'\text{س}}{\text{س}^2}$$

ثم نشترك المقامات بان نضرب كميتى كسر الاول فى س وكميتى الكسر الثانى فى $\sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2}$ فيحدث

$$\text{و}'\text{ص} = \frac{(\text{ح}+\text{س})}{\text{س}^2}\cdot\frac{\text{س}^2\,\text{و}'\text{س}}{\sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2}} + \frac{\text{د}^2+\text{س}^2}{\text{س}^2\sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2}}\times-\text{ح}\,\text{و}'\text{س}$$

ثم نجمع البسوط ونختصر حدودها ونقسم على و'س فيوجد اخيرا

$$\frac{\text{و}'\text{ص}}{\text{و}'\text{س}} = \frac{\text{س}^3-\text{ح}\,\text{د}^2}{\text{س}^2\sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2}}$$

وبمساواة البسط بصفر يستخرج منه

$$\text{س} = \sqrt[3]{\text{ح}\,\text{د}^2}$$

ولاجل ان نثبت ان هذا المقدار يوافق النهاية الصغرى يكفى ان نبحث موجب (بند ١٠٧) ثم البسط الذى هو المعروف عدم مقداره نتحصل على هذه الصورة

$$\frac{\text{و}'^2\text{ص}}{\text{و}'\text{س}^2} = \frac{3\,\text{س}^2}{\text{س}^2\sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2}} = \frac{3}{\sqrt{\text{د}^2+\text{س}^2}}$$ وهو مقدار موجب

بالطبع ولا يتغير بوضع مقدار س لان المربع س² موجب دائما

* [illegible] *

* ١١١ * [illegible]

على [illegible]

وا[illegible] ان [illegible] (شكل ١١) ثم رمزنا بحرف ح

ونرمز لاحد الضلعين بحرف س فالضلع الآخر يصير $\sqrt{\text{ح}^2-\text{س}^2}$

ومقدار مساحة المثلث يكون حينئذ $\frac{\text{س}}{2}\sqrt{\text{ح}^2-\text{س}^2}$ فاذا رمزنا لهذه

* ١١٠ * نريد ان نمد من نقطة مفروضة داخل زاوية قائمة خطا مستقيما يكون حرؤه المحصور بين ضلعى هذه الزاوية نهاية صغرى ولذلك نفرض ان الزاوية تكون س ا ص (شكل ١٧) والنقطة المفروضة داخلها تكون ح ثم نفرض ان المستقيم المطلوب يكون وهـ ونرمز لبعد اب بحرف ح وا ب ح بحرف ء ولبعد ب هـ بحرف س فتحدث من تشابه مثلثى ب ح هـ و اوهـ القائمى الزاوية هذه المناسبة

ب هـ : ب ح :: اهـ : او أو

س : ء :: ح + س : او ومنها يحدث

$$او = \frac{ء}{س}(ح+س)$$

وبتربيع الطرفين يكون

$$\overline{او}^2 = \frac{ء^2}{س^2}(ح+س)^2$$ وغير ذلك يوجد

$$\overline{اهـ}^2 = (ح+س)^2$$

فتوضع هذه المقادير فى دستور $وهـ = \sqrt{\overline{او}^2+\overline{اهـ}^2}$ فيحدث من ذلك

$$وهـ = \sqrt{\frac{ء^2}{س^2}(ح+س)^2+(ح+س)^2} = \sqrt{\left(\frac{ء^2}{س^2}+1\right)(ح+س)^2}$$

وباتحاد المقام فى المضروب الاول الذى تحت الجذر يوجد

$$وهـ = \sqrt{\frac{ء^2+س^2}{س^2}(ح+س)^2} = \frac{ح+س}{س}\sqrt{ء^2+س^2} = ص$$

وباعتبار هذه الكمية حاصل ضرب مضروب $\frac{ح+س}{س}$ فى مضروب $\sqrt{ء^2+س^2}$ نجرى التفاضل على مقتضى (بند ١٤) فيوجد

$$وا ص = \frac{ح+س}{س}\, وا\, \sqrt{ء^2+س^2} + \sqrt{ء^2+س^2}\, وا\, \frac{ح+س}{س}$$ او

وا

بحرف هـ ثم نرسم مح موازيا لمحور الافقيات فيحدث

$ح ع = د (س + هـ)$ و

$م ح = د (س + هـ) - د س = \frac{وص}{وس} هـ + \frac{و^2 ص}{و س^2} \cdot \frac{هـ^2}{1 \times 2} + \ldots$ الخ

واذا رجعنا الى معادلة ظل ... الخ

$م ح : م ح :: ١ : ظا ع$

عوضنا عن مح و مح بما ساواهما نجد

$ظا ع = \frac{\frac{وص}{وس} هـ + \frac{و^2 ص}{و س^2} \cdot \frac{هـ^2}{1 \times 2} + \ldots}{هـ}$

$= \frac{وص}{وس} + \frac{و^2 ص}{وس^2} \cdot \frac{هـ}{1 \times 2} + \ldots$ الخ

وحين نرتقي الى النهاية تصير هـ صفرا ويؤول ظا ع الى ظا ط ويوجد اذن

$ظا ط = \frac{وص}{وس}$

هذا واذا صار حم (شكل ١٩) نهاية كبرى صار مماس م ط موازيا الى محور الافقيات فيجعل بينه وبين هذا المحور زاوية قدرها صفرا ولهذا السبب يوجد $\frac{وص}{وس} = ٠$

ومثل ذلك يثبت انه متى كان م ع نهاية صغرى فلا بد ان يكون $\frac{وص}{وس} = ٠$

ويعلم من ذلك ان معادلة $\frac{وص}{وس} = ٠$ لا تبين الا شرط توازي المماس في نقطة م التي ابعادها س و ص الى محور الافقيات

١١٣ نبحث الآن عن الحالات التي يكون فيها $\frac{وص}{وس}$ ...

المساحة بحرف ص وراجعنا (بند ١٠٣) وجدنا ان المعادلة التى لابد يؤخذ تفاضلها تكون هى

$ص = س \sqrt{ح - س^٢}$ أو وهو الاولى

$ص = \sqrt{ح س^٢ - س^٤}$ ومنها يستخرج

$$\frac{وَص}{وَس} = \frac{ح س - ٢ س^٣}{\sqrt{ح س^٢ - س^٤}}$$

وحين يساوى هذا المقدار بصفر نجد

$ح س - ٢ س^٣ = ٠$ أو

$س (ح^٢ - ٢ س^٢) = ٠$ ومنها يحدث

$س = ٠$ و $٢ س^٢ = ح^٢$

وحيث انه لا يمكن ان يكون مقدار س صفر فيستخرج ذلك المقدار من المعادلة الثانية يعنى الاخيرة فيوجد $س = \sqrt{\frac{ح^٢}{٢}}$ وبهذا المقدار يستدل على ان ضلعى اك و كد يكونان متساويين

هذا وبأخذ تفاضل مضروب $ح^٢ - ٢ س^٢$ يوجد كما فى (بند ١٠٧) أن

$$\frac{وَص}{وَس^٢} = \frac{س}{\sqrt{ح^٢ س^٢ - س^٤}} \times \frac{وَ(ح^٢ - ٢ س^٢)}{وَس} = - \frac{٤ س^٢}{\sqrt{ح^٢ س^٢ - س^٤}}$$

وبسبب سلب هذا المقدار يتحقق ان فرضية $ح^٢ - ٢ س^٢ = ٠$ تحدث لمجهول س مقدارا يوافق الى نهاية كبرى

(فى المدلول الهندسى للمكررات التفاضلية)

* ١١٢ * قد علمنا من (بند ٧١) ان $\frac{وَص}{وَس}$ يبين ظل الزاوية التى تقع بين الخط المماس فى نقطة (س و ص) وبين الخط الافقى وحيث كانت هذه القضية اساسا لما يراد البحث عنه دلالتها من اول وهلة بالوجه الآتى وهو أن يرمز الى ح م (شكل ٤) بحرف ص والى ح ح

بحرف

[illegible] ويوجد [illegible]

$$ن = -\frac{و^٢ ص}{و س^٢} \quad .... \quad (٥٣)$$

[illegible] (٣١ ، ٣١) [illegible] (٥٣)

يشاهد أن $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ في حد [illegible]

[illegible] وبناء على امكان جعل اشارة [illegible]

[illegible]

$\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ [illegible] يكون المقدار [illegible] $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ [illegible]

جميع حدود [illegible]

[illegible] الاشارات [illegible]

مع الحدود التي تلي $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ [illegible]

$$م ن = + \frac{و ص}{و س} م ع - \frac{و ص}{و س}$$

ومنه ما يحدث

$$\left.\begin{array}{l} \frac{و^٢ ص}{و س^٢} = م ع \\ \frac{و ص}{و س} = - م ع \end{array}\right\} \quad (٥٣)$$

واذا اعتبرت [illegible]

واحدة [illegible]

التي كان تحديب المنحنى [illegible] (شكل ٢٠) [illegible]

$\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ موجبا

واذا اعتبرنا بعد ذلك ثانية معادلتي (٥٣) مع (شكل ٢١) المنسوب لها

وفى اعتبار الحالة التى يكون فيها المنحنى (شكل ٢٠) محدبا نحو محور الافقيات فنفرض ان $\text{اح} = \text{س}$ و $\text{مب} = \text{ص}$ و $\text{حح}' = \text{حب}' = \text{ه}$ ونخرج وضع $\text{مص}'$ بنقطتى م و $\text{م}'$ ونمد مستقيمى مق و $\text{م}'\text{ق}'$ موازيين لمحور الافقيات فيوجد $\text{م}'\text{و} = \text{مح}' - \text{مب} = \text{د}(\text{س}+\text{ه}) - \text{دس}$ وهذه عبارة عن

$$\text{م}'\text{و} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{ه} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{ه}^{٢}}{٢} + \frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}\,\frac{\text{ه}^{٣}}{٢\times٣} + \cdots \text{الخ}$$

وحيث انه يحدث من تشابه مثلثى $\text{مه}'\text{و}$ و معق هذه المناسبة

$$\text{مو} : \text{مه} :: \text{م}'\text{و} : \text{عق} \quad \text{أو}$$

$$\text{ه} : ٢\text{ه} :: \text{م}'\text{و} : \text{عق}$$ التى يستخرج منها

$$\text{عق} = ٢\,\text{م}'\text{و}$$

فيبدل فيها $\text{م}'\text{و}$ بمقداره ليوجد

$$\text{عق} = ٢\,\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,\text{ه} + ٢\,\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{ه}^{٢}}{٢} + ٢\,\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}\,\frac{\text{ه}^{٣}}{٢\times٣} + \cdots \text{الخ}$$

ونعرف عندنا $\text{م}''\text{ح}'' = \text{د}(\text{س}+٢\text{ه})$

و $\text{ش}\text{ح}'' = \text{مح}$

وبطرح الثانية من الاولى يوجد

$$\text{م}''\text{ش} = \text{د}(\text{س}+٢\text{ه}) - \text{ص} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}}\,٢\text{ه} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{٤\text{ه}^{٢}}{١\times٢} + \text{الخ}$$

ثم انك اذا اسقطت من هذا المقدار عق بقى لك (شكل ٢٠)

$$\text{م}''\text{ع} = \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\text{ه}^{٢} + \text{الخ} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٥١)$$

وفى الحالة التى يكون فيها تقعير المنحنى نحو محور الافقيات (شكل ٢١) يلزم أن يطرح من مقدار عق مقدار $\text{م}''\text{ق}$ بعكس ما سلف ليستخرج

مقدار

ص = [illegible] معادلة [illegible]

[illegible] متغير س [illegible] مقدار [illegible]

[illegible] ص [illegible]

[illegible] ص [illegible] (الذي [illegible] ص)

[illegible] المعادلة المذكورة س = [illegible]

[illegible] وس [illegible] ويرسم المنحني [illegible] الرأسيات على محور اس

والافقيات على محور اص

[illegible] النهاية الكبرى والصغرى [illegible] أي هي

[illegible] ص) وذلك يستخرج من المعادلة المفروضة $\frac{ء ص}{ء س}$ = م

ثم يفرض م = ٠ ومن ثمة ينتج $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ من معادلة

$\frac{ء س}{ء ص}$ = م ويشاهد انه متى [illegible] = ٠ يوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ = [illegible]

وعلم من ذلك ان الشرط اللازم لوقوع نهاية كبرى وصغرى في جهة الافقيات

هو أن يكون $\frac{ء ص}{ء س} = \infty$

* ١١٦ * ولنمثل بمعادلة

[illegible]

فنستخرج منها $\frac{ء ص}{ء س}$ = [illegible] ويساوي هذا المقدار بصفر

يكون ص = ∞ ويتبين من ذلك انه لا يوجد للمنحني نهاية كبرى نحو

الرأسيات الاعلى بعد غير محدود من محور اس

ولاجل أن يعرف هل توجد له نهايات نحو الافقيات اولا

(والنهايات تشمل الكبرى والصغرى) يفرض مقدار

شديدة ... م ع يين خطا مستقيما متعاكس في الاشارة مع صـ

... ان $\frac{و^{٢}صـ}{و سـ^{٢}}$ يكون سالبا في حالة (شكل ٦١) يعني متى يكون

تقعير المنحنى ... نحو محور الافقيات

* ١١٤ * قد فرضنا فيما مر ان المنحنى ممتد فوق محور الافقيات والآن

بحيث ... حينئذ هذا المنحنى تحت المحور المذكور كما في (شكل ٦٧)

فنقول من الذي تقرر من بعد ما سبق انه حيث كان المنحنى محدبا نحو محور

الافقيات في نقطة م فكمية $\frac{و^{٢}صـ}{و سـ^{٢}}$ أو م ن تكون موجبة لكن مستقيما

م ... و م ... الموجودان في جهة واحدة من مماس ط ط َ يجب

ان يكونا متحدى الاشارة ومن ثمة يكون م ... موجبا كما أن م ...

موجب وينتج من ذلك ان $\frac{و^{٢}صـ}{و سـ^{٢}}$ في نقطة م المقعر فيها المنحنى نحو محور

الافقيات يكون مختلفا في الاشارة مع الرأسى م ع َ المتبوع باشارة السلب

وبالعكس فانا يكون المنحنى محدبا نحو محور الافقيات متى كان صـ

و $\frac{و^{٢}صـ}{و سـ^{٢}}$ متحدى الاشارة واذن يمكن أن يقال في العموم أن $\frac{و^{٢}صـ}{و سـ^{٢}}$

يكون متحدا في الاشارة مع صـ متى كان المنحنى موجها تحديبه نحو

محور الافقيات بوقوعه في اى جهة كانت ويأخذ اشارة عكس اشارة صـ

متى كان المنحنى موجها تقعيره نحو المحور المذكور

ويعلم ان المنحنى يكون محدبا او مقعرا نحو محور الافقيات بحسب كون الرأسى

آيلا الى نهايته الصغرى او نهايته الكبرى ويتضح السبب في ان $\frac{و^{٢}صـ}{و سـ^{٢}}$

موجب في الحالة الاولى وسالب في الثانية

* ١١٥ * ويقال ايضا انه يمكن أن توجد نهاية كبرى اونهاية صغرى

متى يكون $\frac{و صـ}{و سـ} = \infty$ ولشرح مدلول هذا الشرط نفرض أن

صـ

نقطة فريدة او غريبة واذا علمنا موضع هذه النقط يمكن مع سهولة تتبع المنحنى فى سيره

مثاله اذا فرض ان يوجد منحنى (شكل ٧٠) نقطة تعريب حدا بها فى ه والاخرى فى [illegible] ونقطتان عكسيتان فى ف و [illegible] امكن تشكيل المنحنى بالكيفية الآتية وهى أن نقول بالابتداء من نقطة ا [illegible] فى جهة الافقيات يتقعر المنحنى اولا نحو محور الافقيات الى نقطة [illegible] توجد فيها نقطة تحديب أعنى يتحول المنحنى فيها من التقعر الى التحديب ومن هذه النقطة الى ف يكون قوس هـ ف من المنحنى محدبا الى المحور المذكور وفى نقطة ف التى هى نقطة عكسية [illegible] بعدها يكون محدبا ايضا فى جزء [illegible] لنقطة التحديب [illegible] ويمتد هكذا الى [illegible] نحو الراسيات ويتركب المنحنى اخيرا من قوسى [illegible] ح الى ح ومن ابتدا ا الى ح [illegible] نحو محور الافقيات ويتلاقيان فى نقطة عكسية [illegible] احداهما على التحديب جهة الافقيات و[illegible] على التحديب جهة الراسيات

* ١٢٠ * ومن بعد ماتقرر تعلم طريقة تعيين ابعاد النقط الغريبة بواسطة معادلة المنحنى وحيث بينا آنفا طرق ايجاد النهايات الكبرى والصغرى فلم يبق علينا الا ان نشتغل ببحث مابقى من النقط وهى [illegible] فنقول

(فى نقط [illegible])

* ١٢١ * قد علمنا مما سبق ان نقطة [illegible] هى التى [illegible] من التحديب الى التقعير أو من التقعير الى [illegible] (شكل ٧١) يحتوى على نقطة من هذا الجنس فى م [illegible] ثم نعتبر [illegible] الراسيات المحصورة بين م ع و م ع [illegible] م [illegible] للراسى يأخذ فى التناقص و ينعدم فى نقطة م واذا اعتبرنا الراسيات التى بعد وهى الكائنة عن يسار م ع شاهدنا وقوع الامداد [illegible]

$\frac{وص}{وس}$ ... ٢ص = ∞ ... يجعل

فبعد يكون مقدار $\frac{و^2ص}{وس^2}$ الى ... وهو اذن موجب ويعلم من ذلك ان مقدار ص = ٠ يصل الى نهاية صغرى للكمية س وتتعين هذه النهاية بجعل ص = ٠ في معادلة المفروضة فتؤول الى س − د = ٠ ومنها يحدث س = د وهو مقدار النهاية الصغرى المطلوبة وهي مبينة بخط ا م ف (شكل ٢٣)

* ١١٧ * وليتامل ان معادلة $\frac{وص}{وس}$ = ∞ تدل على ان مماس م ط (شكل ٢٣) نظل زاوية قائمة ومن ثم يكون عموديا على محور الافقيات

(كلام كلي على النقط الغريبة والعريبة للمنحنيات)

* ١١٨ * في حساب التفاضل فائدة عظيمة لمعرفة صورة او شكل المنحنى المعلوم المعادلة وقد أبهت لنا مسايا النهايات الكبرى والصغرى طرق تعيين حدود المنحنى في جهة الافقيات والراسيات ولكن هذا غير كاف في تعيين صورة المنحنى او شكله فاننا نشاهد مثلا عدم تشابه منحنيات اشكال (٦٨) و (٦٩) و (٧٠) التي لها نهايات متحدة وهي وح و ود في جهة الراسيات و او و وب في جهة الافقيات فان منحنى (شكل ٦٨) يتميز عن منحنى (شكل ٦٩) بكون انه لا يوجد في الاخير الا نقطة تحديب واحدة ونقطة التحديب هي التي يحول المنحنى فيها من التحديب الى التقعير او عكسه واما المنحنى الاول وهو الموافق الى (شكل ٦٨) فانه يحتوي على نقطتين من نقط التحديب احداهما في هـ والاخرى في ح ويحتوي على نقطة قبلية او عكسية في ع والمراد بهذه النقطة كل نقطة يتعطل المنحنى فيها عن طريق سيره دفعة واحدة

* ١١٩ * وعلى العموم كل نقطة وقع للمنحنى فيها تغير في سيره تسمى

نقطة

[illegible] (٤٧)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] (٥٠)

[illegible] (٥١)

لكن لوقوع نقطة تحديب فى م يجب أن يكون احد خطى م ت و م ت
واقعا فوق مماس ط ط' والآخر تحته متى أخذ هـ مقدارا صغيرا
جدا فيعلم من ذلك انه يلزم معا كمية م ت و م ت فى اشارة وهذا

لايمكن الا ان كان حد الاول وهو [illegible] من متسلسلتى (٥١)

و (٥٠) صفرا لانه دائما يمكن ان يتساوى فى صغر [illegible] اعطاء

كمية هـ مقدارا صغيرا كافيا لان يجعل [illegible] فائقا حاصل

الجمع الجبرى لحدود التى تليه فى المسلسلة واشارة هذا الحد تكون فى هذه

تحت مماس ومن ثم تتغير نقطة يعني به ... ن موجودة ... ن
م ن س بأوجه هو شرط الذي هنا نشرحه بالمعادلة ... شكل ٧١ ع ع = هـ ÷ ع ع فمن المعلوم انه يوجد

م نَ = مَ عَ − نَ عَ أو

م نَ = د(س+هـ) − ن عَ ...... (٥٤)

والتعيين مقدار ن عَ نسح

ن عَ = م ع + ﻫ و أو

ن عَ = ص + ن و ...... (٥٥)

ولاستخراج مقدار ن و نظر انه يحدث من مثلث ﻫ م و القائم الزاوية

ن و = م و ظا ن م و

وحيث انه يعلم من بند (٧١) ان ظل زاوية ن م و الواقعة بين المماس والخط المرسوم من نقطة المماس م موازيا للخط الافقي يساوي و ص / و س فاذا أبدلنا ظا ن م و في المعادلة الاخيرة بهذا المقدار ووضعنا هـ بدلا عن م و نجد أن

ن و = هـ (و ص / و س)

وبوضع هذا المقدار في معادلة (٥٥) عوضا عن ﻫ و ووضع مقدار ن عَ الحادث بعد ذلك في معادلة (٥٤) يوجد

م نَ = د(س+هـ) − ص − (و ص / و س) هـ ...... (٥٦)

ويمكن استخراج مقدار م ن من مقدار م نَ بدون احتياج الى حساب لانه اذا قدرنا سير الراسي بالتوازي لنفسه يشاهد أن م نَ يؤول الى م ن متى تغير هـ بكمية − هـ ويعلم من ذلك انه اذا غيرنا كمية + هـ بكمية − هـ في معادلة (٥٦) يوجد

التفاصلي غير منته ولنمثل بمثال موضح لهذه المشكلة فنقول

ليكن $\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = \frac{ء^٢}{س - ح}$

فاذا ابدلت س بهذه المقادير

$س = ح - هـ$ يوجد $\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = - \frac{ء^٢}{هـ}$

$س = ح$ $\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = \infty$

$س = ح + هـ$ $\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = + \frac{ء^٢}{هـ}$

ثم يشاهد ان مقام مقدار $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ هو الذي تغير اشارته في المكرر التفاضلي بعد نقطة التحديب

* ١٢٤ * وينتج مما سبق انه لامكان وجود نقطة تحديب في منحن يلزم أن يوجد لافق هذه النقطة

$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = ٠$ او $\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = \infty$

ومتى يؤكد وقوع احد هذين الشرطين تراد وتنقص على التوالي من افق النقطة الموافقة لهذا الشرط كمية صغيرة جدا هـ فاذا صار مقدار $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ الحادث مختلف الاشارة كان للمنحني نقطة تحديب لانه متى يكون $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ موجبا يكون تحديب المنحني متجها نحو المحور المذكور ومتى يكون سالبا يكون تقعير المنحني متجها نحو المحور المذكور

(المثال الاول)

* ١٢٥ * لتطبيق القضايا السابقة على امثلة تنظر على يوجد للمنحني المستدل عليه بمعادلة

الحالة كاشارة باقى المسلسلة وحيث كان هذا الحدّ متحد الاشارة في المسلسلتين يكون $مَ ذَ$ و $مُ ذَ$ (شكل ٧١) متحدى الاشارة ايضا ومن جل ذلك يعلم انه ليكون $مَ ذَ$ و $مُ ذُ$ مختلفى الاشارة يلزم أن يوجد

$$\frac{و صـ}{و سـ^٢} \; هـ^٢ = ٠$$ أو وهو الأولى

$$\frac{و صـ}{و سـ^٢} = ٠$$

* ١٢٢ * اذا جعل مقدار سـ الجاعل $\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢}$ صفرا مقدار $\frac{و^٣ صـ}{و سـ^٣}$ ايلا الى صفر أيضا يجب لوجود نقطة تحديب آن يكون $\frac{و^٤ صـ}{و سـ^٤}$ مساويا الى صفر كذلك واذا صار في هذه الحالة $\frac{و صـ}{و سـ^٥}$ صفرا يجب أن يكون ايضا $\frac{و صـ}{و سـ^٦}$ مساويا الى صفر لتوجد نقطة تحديب وعلى هذا فقس واذن يجب أن يكون المكرر التفاضلى الاخير الذى يكون صفرا برتبة مزدوجة

* ١٢٣ * متى يجعل مقدار سـ المتحد في حلى (٥٨) و (٥٩) $\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢}$ غير محدود يكون هذان الحلان غير محدودين ايضا ولا ينتج شئ حينئذ من الاثبات السابق المؤسس على امكانية هذين الحلين وينبغى أن يعلم في هذه الحالة أن شرط $\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢} = ٠$ يستدل به في العموم على وجوب تغيير اشارة $\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢}$ في نقطة التحديب وهذا يوافق ماهو مشروح في بند (١١٣) ويمكن تغيير هذه الاشارة ايضا حين يصير هذا المكرر التفاضلى .

١٢٦ وليتنبه هنا لان متى كان مقدار $\frac{وص}{وس}$ صفرا فلا يلزم منه وجود نقطة تحدب او تقعر [illegible] في معادلة ص = ءد+ج س ... [illegible]

$$\frac{وص}{وس} = ... [illegible]$$

ولا شك انه يمكن ان يكون مقدار $\frac{وص}{وس}$ صفرا (نهاية ثابتة)

ومن ثم يلزم ... [illegible] المستدل عليه بمعادلة ص = ... [illegible]

... عن نقطة التحدب ... [illegible]

... يجب ... مقدار $\frac{وص}{وس}$ ... [illegible]

نقطة ... [illegible]

* [illegible] *

١٢٧ * ... هذه المعادلة ... [illegible]

الى ص ثم ... [illegible]

$$ص = س^{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{وص}{وس} = \frac{5}{3} س^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{و^2ص}{وس^2} = \frac{10}{9} ... [illegible]$$

ثم يوضع $\frac{5}{3} \times \frac{2}{3}$ ... [illegible]

... = ٠ فقط

ليبحث عن مقدار س الموافق الى نقطة التحدب في ... هذه المعادلة

$$\text{ص} = \text{ء} + ٢ (\text{س} - \text{ح})^٣ \quad \ldots\ldots (٦٠)$$

نقطة تحديب ولذا نأخذ التفاضل فيوجد بعد القسمة على وس

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = ٣ \times ٢ (\text{س} - \text{ح})^٢ \text{ ثم يوجد}$$

$$\frac{\text{و}^٢\text{ص}}{\text{وس}^٢} = ١٢ (\text{س} - \text{ح}) \text{ و}$$

$$\frac{\text{و}^٣\text{ص}}{\text{وس}^٣} = ١٢$$

ولاجل أن يمكن وجود نقطة تحديب للمنحنى يجب أن يكون للمتغير س

مقدارا يجعل $\frac{\text{و}^٢\text{ص}}{\text{وس}^٢}$ ايلا الى صفر وحيث كانت س كمية متغيرة

فيتعين احد مقاديرها بشرط وجود ١٢ (س — ح) = ٠ ويوجد

حينئذ س = ح لاجل الافق الذى يمكن أن يصلح لنقطة تحديب

ولتأكيد وجود هذه النقطة فى المنحنى ينقص من افق ح كمية صغيرة جدا

رمزها هـ ثم يوضع ح — هـ محل س فتكون نقطة مَ

(شكل ٧٢) التى افقها ح — هـ موافقة الى

$$\frac{\text{و}^٢\text{ص}}{\text{وس}^٢} = - ١٢ \text{ هـ}$$

ثم يوضع ح + هـ محل س فتوافق نقطة مً التى افقها ح + هـ

الى $\frac{\text{و}^٢\text{ص}}{\text{وس}^٢} = + ١٢$ هـ وبسبب اختلاف هذين الحلين فى

الاشارة يتحقق وجود نقطة التحديب فى المنحنى المفروض فى م وحيث

كان فرض س = ح يجعل $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ آيلا الى صفر ايضا فيتحقق

توازى المماس فى نقطة التحديب بالمحور الافقى

(المثال الثانى)

$$\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢} = \pm \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢} \sqrt{\frac{١}{سـ}}$$

وحيث انه بجعل سـ = ٠ يوجد $\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢} = \infty$ فيستدل بذلك على انه يمكن أن توجد نقطة تحديب فى النقطة الاصلية و حقق وجودها وعدمه نجعل اولا سـ = + هـ ونضع هذا المقدار فى مقدار $\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢}$ فيكون

$$\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢} = \pm \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢} \sqrt{هـ}$$

ثم نجعل سـ = ـ هـ فيصير مقدار $\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢}$ تخيليا وكذا يكون مقدار صـ وذلك يدل على ان المنحنى لا يمتد جهة الافاق السالبة واذن لا توجد نقطة تحديب ولو أن $\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢}$ فى النقطة الاصلية غير محدود وستعرف بالاثر أن النقطة الاصلية ا (شكل ٧٤) هى من طبقة النقط المسماة بالعكسية ولنشرحها فنقول

(فى النقط العكسية)

* ١٢٩ * اذا امتنع المنحنى عن طريق سيره دفعة واحدة وانقلب على عقبه كانت له نقطة عكسية فاذا تحدبت احدى طيتيه نحو محور الآفاق وكانت الطية الاخرى مقعرة نحوه كما يرى فى (الشكل ٧٤) يقال للانقلاب او الانعكاس من الجنس الاول ويكون هذا الانعكاس من الجنس الثانى متى كان تقعيرها تين الطيتين فى جهة واحدة كما فى (شكل ٧٥)

* ١٣٠ * ويمتنع المنحنى عن طريق سيره هكذا لان المقادير التى يأخذها افق سـ فى الجهة الاخرى لنقطة حـ العكسية يحدث منها مقادير تخيلية للراسى صـ ويلزم ذلك أن يكون $\frac{و^٢ صـ}{و سـ^٢}$ محتويا على كمية

اعنى لا تحقق الا بوضع $س = \infty$ وبهذا يستدل على شئ لكنه حيث يتيسر لنا ايضا جعل مقدار $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ غير منتهٍ فتتحقق معادلة

$$\frac{٢}{٩\sqrt[٣]{س}} = \infty$$

بوضع $س = ٠$ وبهذا المقدار يستدل على انه يمكن أن يكون للمنحنى المفروض نقطة تحديب في النقطة الاصلية ولتأكيد وجود هذه النقطة تبدل $س$ بكميتى $٠ + هـ$ و $٠ - هـ$ اعنى $+ هـ$ و $- هـ$ على التعاقب وننظر هل يكون $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ في هاتين الحالتين متبوعا باشارتين مختلفتين والاولى أن تفعل هاتان العمليتان معا بابدال $س$ بمقدار $\pm هـ$ فيؤول المكرر التفاضلى الذى بدرجة ثانية الى

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = \pm \frac{٥}{٢} \times \frac{٢}{٣} \sqrt[٣]{\frac{١}{هـ}}$$

والمقدار العلوى وهو المتبوع باشارة $+$ ينتسب الى افق اكبر من أفق نقطة التحديب والسفلى وهو المتبوع باشارة $-$ ينتسب الى افق أصغر من افق هذه النقطة وبسبب تخالف هذين المقدارين في الاشارة يتحقق وجود نقطة التحديب في المنحنى المستدل عليه بمعادلة $ص^٣ = س^٥$ في النقطة الاصلية انظر (شكل ٧٣)

(المثال الرابع وهو الاخير)

* ١٢٨ * لتكن هذه المعادلة

$(ص - ى)^٢ = س^٣$ فيوجد منها

$$ص = ى \pm س^{\frac{٣}{٢}}$$

$$\frac{و ص}{و س} = \pm \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{ء صـ}{ء سـ} = ١ \pm \frac{٩}{٢} سـ^{\frac{٧}{٢}} \qquad (٦٢)$$

$$\frac{ء^٢ صـ}{ء سـ^٢} = \pm \frac{٩}{٢} \times \frac{٧}{٢} سـ^{\frac{٥}{٢}} = \pm \frac{٩}{٢} \times \frac{٧}{٢} سـ^٢ \sqrt{سـ}$$

وللدلالة على تقعير المنحنى نحو محور الافق او تحديبه قريبا من النقطة التى يمتنع عن طريق سيره فيما يزاد افق هذه النقطة كمية صغيرة هـ اى يجعل

سـ = ٠ + هـ اعنى سـ = هـ ويوضع هذا المقدار فى مقدار $\frac{ء^٢ صـ}{ء سـ^٢}$ فيحدث

$$\frac{ء^٢ صـ}{ء سـ^٢} = \pm \frac{٩}{٢} \times \frac{٧}{٢} هـ^٢ \sqrt{هـ}$$

وحيث ان هذين المقدارين مختلفا الاشارة يستدل بهما على طيتين احداهما (شكل ٧٦) تتحدب نحو محور الآفاق والاخرى انها تتقعر نحوه ويعلم من ذلك ان النقطة الاصلية نقطة عكسية من النوع الاول

(المثال الثانى)

« ١٣٢ » لتكن هذه المعادلة

(صـ — ى)^٢ = (سـ — حـ)^٣ فيستخرج منها

$$صـ = ى \pm \sqrt{(سـ — حـ)^٣} \qquad \ldots\ldots (٦٣)$$

واذا جعلنا سـ = حـ يوجد صـ = ى لكن اذا اخذ متغير سـ مقادير اصغر من حـ حدث الى متغير صـ مقادير تخيلية لانه بوضع حـ — هـ محل سـ يوجد صـ = ى $\pm \sqrt{— هـ^٣}$ = ى $\pm$ هـ $\sqrt{— هـ}$

وهو مقدار تخيلى ويعلم من ذلك ان المنحنى يمتنع عن طريق سيره فى نقطة حـ (شكل ٧٤) التى ابعادها حـ و ى ولمعرفة كيفية امتداد طيات هذا المنحنى بعد نقطة حـ نبدل سـ بمقدار حـ + هـ فى مقدار $\frac{ء^٢ صـ}{ء سـ^٢}$ فيحدث لنا

٢٧ ...

جذرية نسبة الى متغير س واذا احدث $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ قبل أن يمتنع المنحنى عن طريق سيره مقدارين احدهما له اشارة ص والاخر عكسه ستدل بذلك على وجود طيتين للمنحنى مجتمعتين فى نقطة ح (شكل ٧٤) احداهما نحو محور الافق والاخرى مقعرة وبهذه العلامات يمكن الاستدلال على نقطة عكسية من جنس الاول للمنحنى واذا كان العكس

بان كان مقدارا $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ متحدى الاشارة فالطيتان المجتمعتان فى نقطة ح

(شكل ٧٥) لا يمكن أن يكونا الا متحدين فى جهة التقعير او التحديب ويعلم من ذلك ان الانعكاس فى هذه الحالة يكون من الجنس الثانى

(مثال اول)

* ١٣١ * تنظر هل يوجد للمنحنى الذى معادلته

$$(\text{ص} - \text{س})^{٢} = \text{س}^{٩}$$

نقط عكسية ولذلك نستخرج من هذه المعادلة

$$\text{ص} = \text{س} \pm \text{س}^{٤} \sqrt{\text{س}} \cdots\cdots (٦١)$$

فنشاهد أنه كلما اخذ متغير س مقدارا سلبيا حدث لمتغير ص مقدارا تخيليا واذن يمتنع المنحنى عن طريق سيره فى النقطة الاصلية التى ابعادها س = ٠ و ص = ٠ ولكن هذا غير كاف لتأكيد ايجاد نقطة عكسية فى النقطة الاصلية لانه يحتمل أن لا يوجد فى هذه النقطة الا قوسا من منحنى يمتد تقعيره على الدوام فى جهة واحدة كما يكون فى رأس القطع الزايد ولذا ينبغى لمعرفة كون س = ٠ يصلح لنقطة عكسية أن يعرف ما يؤول اليه المكرر التفاضلى الذى بدرجة ثانية قرب النقطة الاصلية فيؤخذ

تفاضل معادلة ص = س ± $\text{س}^{\frac{٩}{٢}}$ ثم يقسم الناتج على وس فيوجد

يكونان موجبان و ينتج من ذلك انه يوجد فى النقطة الاصابة طيتان مقعرتان معا نحو محرر الاّفات و ان تكون هذه النقطة نقطة عكسية من الجنس الثانى

* ١٣٤ * النقط العكسية ليست الا طبقة من النقط المسماة نقطا مكررة وهى الآتى شرحها

(فى النقط المكررة)

* ١٣٥ * النقطة التى تجتمع فيها جملة طيات من منحن تسمى نقطة مكررة فان كانت الطيات اثنتين سميت هذه النقطة نقطة مضعفة وان كانت ثلاثة سميت نقطة مثلثة وهلم جرا نظرا لعدة الطيات المجتمعة فيها

* ١٣٦ * لتكن ا (شكل ٧٧) نقطة مضعفة حادثة من منحنى اح و اب المماس بهما اط و اط فاذا رمزنا لمعادلة منحنى هاتين الطيتين بهذا الرمز ى (س و ص) = ٠ وكانت هذه المعادلة عارية عن الكميات الجذرية كان تفاضليا وهو الكائن بهذه الصورة ح و س + ك و ص = ٠ غير محتو على جذر اصلا لانه لم يدخل فى هذه الدالة تفاضل كمية جذرية و ينتج من ذلك ان كميات ح و ك تكون كميات غير جذرية هذا و يوجد من المعادلة السابقة

$$\frac{و ص}{و س} = -\frac{ح}{ك} \cdots\cdots (٦٤)$$

ويجب أن يكون المذكور $\frac{و ص}{و س}$ التفاضلى مقدارين مختلفين حيث انه يوجد خطان مماسان و يلزم أن يتعين $\frac{ح}{ك}$ بواسطة هذا الشرط وذلك يكون متى اشتمل $\frac{ح}{ك}$ على جذر لكن ذلك غير ممكن لان $\frac{ح}{ك}$ غير جذرى ففى هذه الحالة يلزم أن يكون $\frac{ح}{ك}$ ايلا الى هذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ لان هذه الصورة غير متعينة فتحقق بجملة مقادير كما يعلم من الجبر

* ١٣٧ * وها هى كيفية اثبات هذه القضية

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = \pm \frac{٣}{٤ \sqrt{هـ}}$$

ويستدل بالاشارة العليا على طية حم المحدبة نحو محور الآفاق والاشارة السفلى على طية حن المقعرة نحو المحور المذكور واذن توجد نقطة عكسية من الجنس الاول فى ح

(المثال الثالث)

* ١٣٣ * ولنأخذ المنحنى المستدل عليه بمعادلة

$ص = ح س^٢ \pm ى س^٢ \sqrt{س}$ مثالا فنقول

حيث انه بجعل $س = ٠$ يوجد $ص = ٠$ وبجعل س سالبا يكون ص تخيليا يدرك ان المنحنى يمتنع عن طريق سيره فى النقطة الاصلية فنبحث عما يؤول اليه $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ ولذلك نضع المعادلة السابقة بهذه الصورة

$ص = ح س^٢ \pm ى س^{\frac{٥}{٢}}$ فنستخرج منها

$$\frac{و ص}{و س} = ٢ ح س \pm \frac{٥}{٢} ى س^{\frac{٣}{٢}}$$ و

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = ٢ ح \pm \frac{٥}{٢} \times \frac{٣}{٢} ى \sqrt{س}$$

ثم نعطى الى متغير س مقدارا موجبا صغيرا جدا وليكن هـ فجزء $\frac{٥}{٢} \times \frac{٣}{٢} ى \sqrt{هـ}$ من مقدار $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ يكون اصغر من جزء ٢ح ويعلم من ذلك ان مقدارى $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ المستدل عليهما بمعادلة

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = ٢ ح \pm \frac{٥}{٢} \times \frac{٣}{٢} ى \sqrt{هـ}$$

يكونان

هذه القضية ... على ... شرحه

) حين ... على ... الفصل ... فقامه

* من ... (١٣٠) مؤسس على خلو

من جذور ... من غير

جذور ... على

= ٠ ... من معادلة (١٣١) فان

في ... (٦٢) الى :

= ٠ ولكن تؤول الى $\frac{ء\,ص}{ء\,س}$ = ١

* وبالجملة فلننضم الى ما ذكر أن معادلة $\frac{ء\,ص}{ء\,س}$ = :

جود النقطة المكررة ليست مستلزمة ...

لى انه يلزم من وجود هذه المعادلة وجود النقطة واما ...

تبين فقط احتمال وجود نقطة مكررة في المنحنى المفروض

* وما ذكر يكفي لبيان طريقة معرفة هل يمكن أن توجد

على ... بمعادلة مفروضة نقط مكررة اولا ... ان

تكون ع = ٠ ثم يؤخذ تفاضلها فيوجد

ء ص = ٠

مقادير س و ص ... معادلتي ع = ٠ و ... = ٠

ضة اولا فان كان ذلك ... هذا دليلا على احتمال وجود

ة في المنحنى يستدل على بعديها بمقداري س و ص

عن كيفية المنحنى حول هذه النقطة فبهذا البحث يحقق

لة مكررة

٢٨ فا

[illegible] ث آ ، أ [illegible] مقادير [illegible] الرقتين بين مماسي •
[illegible] تحقق هذه المقادير معادلة

$$\text{ح} + \text{ث} \; \text{ى} \; \frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}} = \text{٠}$$

بوضع اى منها محل $\frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}}$ ويوجد حينئذ

$$\text{ح} + \text{ك} \; \text{آ} = \text{٠} \quad \text{و}$$

$$\text{ح} + \text{ك} \; \text{أ} = \text{٠}$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما يوجد

$$\text{ك} \, (\text{آ} - \text{أ}) = \text{٠}$$

ولما كان مضروب $\text{آ} - \text{أ}$ يتركب من كميتين غير متساويتين وهما آ و أ فلا يكون صفرا ولتحقيق المعادلة الاخيرة يجب أن يكون $\text{ك} = \text{٠}$ وبهذا تؤول معادلة $\text{ح} + \text{ك} \; \text{آ} = \text{٠}$ الى $\text{ح} = \text{٠}$ وتؤول معادلة $\text{ح} + \text{ك} \frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}} = \text{٠}$ أو وهو الاولى

$$\frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}} = - \frac{\text{ح}}{\text{ك}} \quad \text{الى} \quad \frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}} = \frac{\text{٠}}{\text{٠}}$$

* ١٣٨ * اذا كان شكل الطيتين المجتمعتين فى نقطة واحدة جملة طيات يكفى أن تعتبر اثنتان منها فقط ولاجل أن تتقاطع جميع الطيات فى ملتقى • هاتين الطيتين يجب أن يكون $\frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}} = \text{٠}$

وليتأمل انه متى وجدت جملة طيات من منحن لها مماس مشترك كانت هذه الطريقة عاجزة عن التوصيل الى نواتج كالسابقة لكن يجب أن يكون فى هذه المسألة ايضا المكرر $\frac{\text{وَصـ}}{\text{وَسـ}}$ التفاضلى ممكن الايلولة الى هذه الصورة $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$

وحيث

آيلة الى صفر فاذا وقع هـذا الشرط كان وجود النقطة المزدوجة فى المحنى محتملا ولتكن هذه المعادلة $ص = \pm (س + ١) \sqrt{س}$ مثلا فيؤخذ تفاضلها فيوجد

$$\frac{وص}{وس} = \pm \left(\frac{٣}{٢} \sqrt{س} + \frac{١}{٢\sqrt{س}} \right)$$

وحيث ان هذا المقدار يؤول الى كمية تخيلية متى يجعل $س = -١$ ويؤول مقدار ص الى $ص = ٠$ يعلم من ذلك ان نقطة ا التى ابعادها $س = -١$ و $صَ = ٠$ (شكل ٧٨) يحتمل أن تكون نقطة مزدوجة وتعرف كون هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق باضافة كمية اصغر من ١ على بعد -١ وكذا بطرح هذه الكمية من -١ على الولا فاذا فعلنا هكذا وجدنا فى هاتين الحالتين مقدارين تخيليين لمتغير ص وبهذا نستدل على ان هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق

* ١٤٣ * النقط المزدوجة كالنقط المكررة يحتمل وجودها فى المحنى متى آل مكرر $\frac{وص}{وس}$ التفاضلى الى : لانه اذا اخذ تفاضل معادلة

$$ك \frac{وص}{وس} + ح = ٠$$ وقسم الناتج على وس يوجد

$$ك \frac{و^٢ص}{وس^٢} + \frac{وص}{وس} \cdot \frac{وك}{وس} + \frac{وح}{وس} = ٠$$

ويرى ان مكرر الحد المتبوع بكمية $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ هو ك فاذا اخذ التفاضل مرة اخرى شوهد أن ك تكون مكرر العدد المحتوى على $\frac{و^٣ص}{وس^٣}$ ايضا وهكذا يعنى انه متى وصل الى المكرر التفاضلى الذى درجته ن يوجد ناتج بهذه الصورة

(في النقط المزدوجة)

* ١٤٢ * النقطة التي تطابق لبعدين حقيقيين في الجزء الذي تكون فيه ابعاد المنحنى المفروض كلها تخيلية ماعدا هذين البعدين الاثنين تكون لامحالة منفصلة بالكلية عن المنحنى ومن اجل ذلك يقال انها نقطة منفصلة او مزدوجة نظرا لازدواج بعديها الحقيقيين المحصورين بين ابعاد تخيلية

ولنرمز الآن بالرمز $\text{ص} = \text{د}\,\text{س}$ لمعادلة منحن مشتمل على نقطة مزدوجة ولتكن ابعاد هذه النقطة ح و ب فيلزم أن تكون الابعاد حول هذه النقطة تخيلية والا لم تكن منفصلة ويفهم من ذلك انه اذا زاد افقي ح كمية صغيرة جدا ولتكن ه كان الرأسي المطابق لذلك $\text{د}(\text{ح} + \text{ه})$ تخيليا لكن يحدث من متسلسلة تيلور في العموم

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ص} + \frac{\text{ق}\,\text{ص}}{\text{ق}\,\text{س}}\,\text{ه} + \frac{\text{ق}^{2}\text{ص}}{\text{ق}\,\text{س}^{2}}\,\frac{\text{ه}^{2}}{1\times2} + \frac{\text{ق}^{3}\text{ص}}{\text{ق}\,\text{س}^{3}}\,\frac{\text{ه}^{3}}{1\times2\times3} + \text{الخ}$$

فاذا جعلنا فيها $\text{س} = \text{ح}$ كان الرأسي الموافق وهو ص آيلا الى ب وبناء عليه يتغير في هذه المتسلسلة ص بكمية ب ويرمز بهذه الرموز

$$\left(\frac{\text{ق}\,\text{ص}}{\text{ق}\,\text{س}}\right) \text{ و } \left(\frac{\text{ق}^{2}\text{ص}}{\text{ق}\,\text{س}^{2}}\right) \text{ و } \left(\frac{\text{ق}^{3}\text{ص}}{\text{ق}\,\text{س}^{3}}\right) + \cdots\cdots \text{ الخ}$$

لما تؤول اليه المكررات التفاضلية في هذه الحالة فيوجد

$$\text{د}(\text{ح}+\text{ه}) = \text{ب} + \left(\frac{\text{ق}\,\text{ص}}{\text{ق}\,\text{س}}\right)\text{ه} + \left(\frac{\text{ق}^{2}\text{ص}}{\text{ق}\,\text{س}^{2}}\right)\frac{\text{ه}^{2}}{1\times2} + \cdots\cdots \text{ الخ}$$

ولاجل أن تكون $\text{د}(\text{ح}+\text{ه})$ كمية تخيلية يلزم بالاقل أن تكون احدى كميات

$$\left(\frac{\text{ق}\,\text{ص}}{\text{ق}\,\text{س}}\right) \text{ و } \left(\frac{\text{ق}^{2}\text{ص}}{\text{ق}\,\text{س}^{2}}\right) \text{ و } \left(\frac{\text{ق}^{3}\text{ص}}{\text{ق}\,\text{س}^{3}}\right) \cdots\cdots \text{ الخ تخيلية}$$

يعني ان فرضية $\text{س} = \text{ح} + \text{ه}$ تجعل احدى المكررات التفاضلية

ايلة

فاذا انطبقت او اتحدت جميع الحدود المتناظرة في الحلين كان المنحنيان المفروضان منطبقين على بعضهما واما اذا كان $\text{ك سَ} = \text{د سَ}$ فقط فلا تكون لهذين المنحنيين الا نقطة واحدة مشتركة وهي م كما عرفت

وان وجد $\text{ك سَ} = \text{د سَ}$ و $\frac{\text{و ك سَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{و د سَ}}{\text{و سَ}}$ معا فان المنحنيين يتقاربان من بعضهما زيادة ويعظم تقاربهما ويشتد متى كان $\frac{\text{و}^2\text{ ك سَ}}{\text{و سَ}^2} = \frac{\text{و}^2\text{ د سَ}}{\text{و سَ}^2}$ زيادة على المعادلات المتقدمة وهلم جرا لان الفرق بين كميتي مَ حَ و مَ حَ يقل كلما كثرت الحدود المتساوية في الحلول المطابقة لهما ولتكن بناء على ذلك ح و د و ر .... الخ ثوابت معادلة $\text{ص} = \text{ك سَ}$ فيمكن أن تأخذ هذه الثوابت مقادير اما من غير أن يتغير جنس المنحني لان معادلة $\text{ص}^2 = \text{م س} + \text{ن س}^2$ مثلا التي يستدل بها على قطع ناقص لا تنتفي الدلالة بها على القطوع الناقصة حين تأخذ ثابتتا م و ن اى مقدارين لان صورة المعادلة لا تختلف (بناء على عدم تغيير اشارتي م و ن وعدم اخذهما مقادير صفر)

ويمكن من بعد ذلك نظر ثوابت ح و د و ر ... الخ الداخلة في معادلات

$$\text{صَ} = \text{ك سَ} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و ك سَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{و صَ}}{\text{و سَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^2\text{ ك سَ}}{\text{و سَ}^2} = \frac{\text{و}^2\text{ صَ}}{\text{و سَ}^2} \quad \text{.. الخ}$$

كثوابت حيث ما اتفقت أعني اختيارية وبأخذ عدة من هذه المعادلات كعدة ما يوجد فيها من الثوابت تتعين تلك الثوابت بالشرط الذي تكون به هذه المعادلات محققة مثلا اذا لم تحتو معادلة $\text{ص} = \text{ك سَ}$ الا على ثوابت ح و د و ر الثلاث بوضع

$$\text{ك سَ} = \text{د سَ} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و ك سَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{و د سَ}}{\text{و سَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^2\text{ ك سَ}}{\text{و سَ}^2} = \frac{\text{و}^2\text{ د سَ}}{\text{و سَ}^2}$$

فيستخرج من هذه المعادلات مقادير ح و د و ر بدلالة سَ و صَ و $\frac{\text{و صَ}}{\text{و سَ}}$ الخ

$$\frac{و^{ن} ص}{و س^{ن}} \cdots \frac{١}{٠} = ٠ \quad (٦٥)$$

وينبني على ذلك انه يوجد بالاقل احد المكررات التفاضلية ايلا الى كمية لا نهائية بتغير وباخذه متغير س ومن ثم يكون هذا المكرر التفاضلي محتويا على كمية جذرية واذا رمزنا لهذا المكرر التفاضلي برمز $\frac{و^{ن} ص}{و س^{ن}}$ لزم ان يكون هذه الكمية ازيد من مقدار واحد وذلك يكفي لان ينتج منه كما في بند (١٣٧) ان ك = ٠ وتؤول معادلة

$$ح + ء ك \frac{و ص}{و س} = ٠$$ بهذا المقدار

الى ع = ٠ وينبني على ذلك ان يكون

$$\frac{و ص}{و س} = \frac{١}{٠}$$

(في المنحنيات الالتصاقية)

* ١٤٤ * لتكن ص = د س و ص = ى س معادلتا منحنيين يتقاطعان في نقطة م التي ابعادها ا ح = سَ و ح م = صَ (شكل ٢٤) فيوجد لامحالة لاجل هذه النقطة

$$د سَ = ى سَ$$

واذا فرضنا ان سَ تصير بعد ذلك سَ + ه احدثت المعادلتان السابقتان

$$م ع = د(سَ + ه) = د سَ + \frac{و د سَ}{و سَ} ه + \frac{و^{٢} د سَ}{و سَ^{٢}} \frac{ه^{٢}}{١ \times ٢} + \cdots \text{الخ} \quad (٦٦)$$

$$م عَ = ى(سَ + ه) = ى سَ + \frac{و ى سَ}{و سَ} ه + \frac{و^{٢} ى سَ}{و سَ^{٢}} \frac{ه^{٢}}{١ \times ٢} + \cdots \text{الخ} \quad (٦٧)$$

فاذا

سَ و صَ (شكل ٥) وستعرف علة تماس هذا المستقيم

* ١٤٦ * ولنعود للقضية السابقة ولعدم التطويل فى العبارة ندع المنحنيات بمعادلاتها فنقول قد رأينا فى بند (١٤٤) انه متى تكون لمنحنيين صـ = د سـ و صـ = ى سـ نقطة واحدة مشتركة مرموز لابعادها برموز سَ و صَ تكون معادلة هذا الشرط ى سَ = ى سَ وبتعيين ثابتتين لمعادلة صـ = ى سـ بواسطة شروط ى سَ = د سَ

و $\frac{و ا ى سَ}{و ا سَ} = \frac{و ا د سَ}{و ا سَ}$ يبتدى هذان المنحنيان فى التقارب

ولنرمز برمز صـ = د سـ لما تؤول اليه صـ = ى سـ بعد مايوضع فيها مقادير هاتين الثابتتين فمنحنى صـ = د سـ يقال له الالتصاق برتبة اولى لمنحنى صـ = د سـ وكذا اذا حذفت بموجب المقادير الحيث ما اتفقت الممكن اعطاها للثوابت ثلاث ثوابت من معادلة صـ = د سـ بواسطة المعادلات الثلاث الآتية اعنى

$$ى سَ = د سَ \quad و \quad \frac{و ا ى سَ}{و ا سَ} = \frac{و ا د سَ}{و ا سَ} \quad و \quad \frac{و ا^٢ ى سَ}{و ا سَ^٢} = \frac{و ا^٢ د سَ}{و ا سَ^٢} \quad (٧١)$$

ورمز برمز لـ سـ لما تؤول اليه ى سـ بعد وضع مقادير هذه الثوابت فيها كان منحنى صـ = لـ سـ الالتصاق برتبة ثانية لمنحنى صـ = د سـ وهو اشد قربا له من الالتصاق الذى برتبة اولى وعلى هذا فقس واذن توجد لاجل الالتصاق النونى الرتبة معادلات

$$ى سَ = د سَ \quad و \quad \frac{و ا ى سَ}{و ا سَ} = \frac{و ا د سَ}{و ا سَ} \quad و \quad \frac{و ا^٢ ى سَ}{و ا سَ^٢} = \frac{و ا^٢ د سَ}{و ا سَ^٢} \quad ... \quad و \quad \frac{و ا^ن ى سَ}{و ا سَ^ن} = ...$$

* ١٤٧ * ولنثبت ان احد الالتصاقين الموجودين بهذه الكيفية اعنى بتغيير ثوابت معادلة واحدة وهو الذى برتبة اقل لايمكن أن يمر بين الالتصاق الآخر وبين المنحنى المنسوب له هذان الالتصاقان ولاجل ذلك

وتوضع تلك المقادير فى معادلة صہ = ٯ سہ فتتمتع هذه المعادلة بهذه الخاصية وهى انه متى تغير فيها متغير سہ بكمية سہَ + ھ تكون الثلاث حدود الاولى من الطرف الثانى لمعادلة (٦٧) التى توجد بواسطة قانون تيلور مساوية بالتوالى للثلاث حدود الاول من الطرف الثانى لمعادلة (٦٦) وماذكر بخصوص المعادلة التى لاتحتوى الاعلى ثلاث ثوابت يمكن تطبيقه على المعادلة التى تحتوى على اكثر من ذلك من الثوابت

* ١٤٥ * ولناخذ الحالة التى تدل فيها معادلة صہ = ٯ سہ على خط مستقيم مثلا فتكون تلك المعادلة حينئذ مستعوضة بهذه

صہ = ح سہ + ب ‎·····‎ (٦٨)

ومعادلات الشرط اللازمة لحذف ثوابت ح و ب تكون

دسہَ = ح سہَ + ب و $\frac{\text{و دسہَ}}{\text{و اسہَ}}$ = ح ‎······‎ (٦٩)

وحيث كانت دسہَ تبين الرأسى فى نقطة م للمنحنى الذى معادلته صہ = د سہ وكانت سہَ توافق صہَ أمكن تغيير دسہَ بكمية صہَ وتؤول معادلات (٦٩) حينئذ الى

صہَ = ح سہَ + ب و $\frac{\text{و صہَ}}{\text{و اسہَ}}$ = ح

وبحذف ح يوجد

صہَ = $\frac{\text{و صہَ}}{\text{و اسہَ}}$ سہَ + ب

وبوضع مقدار ب المستخرج من هذه المعادلة ومقدار ح فى معادلة (٦٨) التى هى معادلة الخط المستقيم تؤول تلك المعادلة الى

صہ ــ صہَ = $\frac{\text{و صہَ}}{\text{و اسہَ}}$ (سہ ــ سہَ) ‎····‎ (٧٠)

وهذه المعادلة هى معادلة مماس م ط فى نقطة م التى ابعادها سہَ

ويمكن وضع الثلاث حلول السابقة هكذا

نفرض مثلا ان م ب (شكل ٢٤) يكون منحنى ص = ء س
وم ح وهو الذى معادلته ص = ل س يكون التصاقيه برتبة ثانية ونريد
الآن أن نثبت ان الالتصاق ص = د س الذى برتبة اولى لا يمكن
ان يمر بين منحنيي م ب و م ح ولذلك نضع سَ + هـ محل س فى
هذه المعادلات فيوجد

$$\text{ح م}' \text{ أو } \text{ء}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ءسَ} + \frac{\text{و ءسَ}}{\text{و سَ}}\text{هـ} + \frac{\text{و}^{2}\text{ءسَ}}{\text{و سَ}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{1\times 2}$$

$$+ \frac{\text{و}^{3}\text{ءسَ}}{\text{و سَ}^{3}}\,\frac{\text{هـ}^{3}}{1\times 2\times 3} + \cdots \text{ الخ و}$$

$$\text{ح م}' \text{ أو } \text{ل}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{لسَ} + \frac{\text{و لسَ}}{\text{و سَ}}\text{هـ} + \frac{\text{و}^{2}\text{لسَ}}{\text{و سَ}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{1\times 2}$$

$$+ \frac{\text{و}^{3}\text{لسَ}}{\text{و سَ}^{3}}\,\frac{\text{هـ}^{3}}{1\times 2\times 3} + \cdots \text{ الخ و}$$

$$\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{دسَ} + \frac{\text{و دسَ}}{\text{و سَ}}\text{هـ} + \frac{\text{و}^{2}\text{دسَ}}{\text{و سَ}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{1\times 2}$$

$$+ \frac{\text{و}^{3}\text{دسَ}}{\text{و سَ}^{3}}\,\frac{\text{هـ}^{3}}{1\times 2\times 3} + \cdots \text{ الخ}$$

وحيث ان منحنى ص = ل س هو الالتصاق برتبة ثانية لمنحنى
ص = ء س فيكون

$$\text{لسَ} = \text{ءسَ} \text{ و } \frac{\text{و لسَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{و ءسَ}}{\text{و سَ}} \text{ و } \frac{\text{و}^{2}\text{لسَ}}{\text{و سَ}^{2}} = \frac{\text{و}^{2}\text{ءسَ}}{\text{و سَ}^{2}}$$

وغير ذلك توجد بسبب كون منحنى ص = د س هو الالتصاق برتبة
اولى لمنحنى ص = ء س هاتان المعادلتان ايضا

$$\text{دسَ} = \text{ءسَ} \text{ و } \frac{\text{و دسَ}}{\text{و سَ}} = \frac{\text{و ءسَ}}{\text{و سَ}}$$

وبمقتضى

المتبين بخط م مَ لا يمكن أن يمر بين المنحنيين الآخرين وكذا لو كانت كمية ى سالبة فانه يكون د (سَ ـ هـ) او ح مَ اصغر من ح مَ ومن ح مَ ويكون حينئذ منحنى م م هو الذى يقرب من محور الآفاق زيادة فلا يمكن أن يكون محصور بين الآخرين وهذا ما أردنا اثباته

* ١٤٨ * يمكن الآن أن نبين السبب الموجب ليكون الخط المستقيم (شكل ٥) الذى فى بند (١٤٥) وهو الالتصاقى برتبة اولى مماسا بالمنحنى لانه ينتج من القضية السابقة عدم امكان مرور مستقيم آخر بين ذلك الخط المستقيم وبين المنحنى المفروض وهذه هى خاصية المماس المحققة ويقال ان هذا التماس تماس برتبة اولى مع المنحنى وعلى العموم يقال للالتصاقى النونى الرتبة مماس بالمنحنى الذى هو التصاقى له تماسا نونى الرتبة ويعلم من ذلك انه متى وجدت بين منحنيين هذه المعادلات الثلاث

$$\text{دسَ} = \text{ىسَ} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}\,\text{دسَ}}{\text{و}\,\text{سَ}} = \frac{\text{و}\,\text{ىسَ}}{\text{و}\,\text{سَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{2}\,\text{دسَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{2}} = \frac{\text{و}^{2}\,\text{ىسَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{2}}$$

كان لهذين المنحنيين تماس برتبة ثانية ويكون هذا التماس برتبة ثالثة متى توجد زيادة على الثلاث معادلات السابقة هذه المعادلة

$$\frac{\text{و}^{3}\,\text{دسَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{3}} = \frac{\text{و}^{3}\,\text{ىسَ}}{\text{و}\,\text{سَ}^{3}}$$ وقس على هذا

* ١٤٩ * حيث ان معادلة الدائرة التى هى

$$(\text{ص} - \text{و})^{2} + (\text{س} - \text{ر})^{2} = \text{نق}^{2}$$

تحتوى على ثلاث ثوابت فيمكننا أن نعين الدائرة التى يكون لها تماس برتبة ثانية مع اى منحن وليكن م ق (شكل ٢٥) المعلوم المعادلة ولذلك نفرض ان سَ و صَ يكونان بعدى نقطة م من محيط هذه الدائرة فمقدار صَ يعلم بواسطة معادلة $(\text{صَ} - \text{و})^{2} + (\text{سَ} - \text{ر})^{2} = \text{نق}^{2}$ .. (٧٢)

$$ل(سَ+هـ)=ك+رهـ^{٢}+ۃهـ^{٣}$$

$$د(سَ+هـ)=ك+\frac{١}{٢}\frac{و^{٢}دسَ}{وسَ^{٢}}هـ^{٢}+ع هـ^{٣}$$

وحيث كان منحنيا صـ = دسـ و صـ = لسـ التصاقيين احدهما برتبة اولى والآخر برتبة ثانية يلزم من ذلك أن تخالف كمية ر مقدار $\frac{و^{٢}دسَ}{وسَ^{٢}}$ يعني انه يكون $ر<\frac{١}{٢}\frac{و^{٢}دسَ}{وسَ^{٢}}$ أو $ر>\frac{١}{٢}\frac{و^{٢}دسَ}{وسَ^{٢}}$

فاذا كانت ر اصغر من $\frac{١}{٢}\frac{و^{٢}دسَ}{وسَ^{٢}}$ وكانت ے هي زيادة $\frac{١}{٢}\frac{و^{٢}دسَ}{وسَ^{٢}}$ عن ر وجد

$$ر+ے=\frac{١}{٢}\frac{و^{٢}دسَ}{وسَ^{٢}}$$

واذا كان الامر بالعكس بان كانت ر اكبر من $\frac{١}{٢}\frac{و^{٢}دسَ}{وسَ^{٢}}$ كانت كمية ے سالبة فاذا وضع مقدار $\frac{١}{٢}\frac{و^{٢}دسَ}{وسَ^{٢}}$ هذا في مقدار د(سَ+هـ) ولوحظ اشتراك مضروب هـ^٢ في الثلاث حلول السابقة الى

$$ء(سَ+هـ)=ك+(ر+مهـ)هـ^{٢}$$

$$ل(سَ+هـ)=ك+(ر+ۃهـ)هـ^{٢}$$

$$د(سَ+هـ)=ك+(ر+ے+ع هـ)هـ^{٢}$$

يمكن بجعل هـ صغيرة جدا تكون كمية ے غير المشتملة على هـ اكبر من كميات مهـ و ۃهـ التي تميل نحو الصفر فاذا كانت ے موجبة عند ذلك ذاتت د(سَ+هـ) دالتي ء(سَ+هـ) و ل(سَ+هـ) ويعلم من ذلك انه يكون في هذه الحالة د(سَ+هـ) أو ع مَ (شكل ٢٤) اكبر من ع مَ ومن ع مً وهذا يبين ان منحنى صـ = دسـ

المتبين

[illegible] (٧٩)

و [illegible] حيث [illegible]

$$ص - و = \frac{1 + \frac{و ص^2}{و س^2}}{\frac{و^2 ص}{و س^2}} \quad \ldots \ldots \quad (٨٠)$$

وبوضع هذا المقدار في معادلة (٧٨) يحدث

$$س - ر = \frac{\left(1 + \frac{و ص^2}{و س^2}\right)\frac{و ص}{و س}}{\frac{و^2 ص}{و س^2}} \quad \ldots \ldots \quad (٨١)$$

وإذا وضعت مقادير ص — و ، س — ر هذه في معادلة (٧٧) حدث

$$\frac{\left(1 + \frac{و ص^2}{و س^2}\right)^2}{\left(\frac{و^2 ص}{و س^2}\right)^2} + \frac{\left(1 + \frac{و ص^2}{و س^2}\right)^2}{\left(\frac{و^2 ص}{و س^2}\right)^2}\,\frac{و ص^2}{و س^2} = نق^2$$

وإذا جمعت البسوط التي يوجد لها مضروب مشترك كان

$$\frac{\left(1 + \frac{و ص^2}{و س^2}\right)^2\left(1 + \frac{و ص^2}{و س^2}\right)}{\left(\frac{و^2 ص}{و س^2}\right)^2} = نق^2$$ وهذه المعادلة تختصر إلى

$$\frac{\left(1 + \frac{و ص^2}{و س^2}\right)^3}{\left(\frac{و^2 ص}{و س^2}\right)^2} = نق^2$$ وبأخذ الجذر التربيعي يوجد

[illegible]

(١) و (٧٥) و (٧٦) فى معادلات (٧٤) ليس الا [illegible]
[illegible] من معادلات (٧٣) و (٧٠) و (٧٥) و (٧٦)
وذلك يزول [illegible] العلامات من معادلات (٧٣) و (٧٥) و (٧٦)
[illegible] ذلك [illegible] = [illegible] = [illegible]
هذا [illegible] العلامات [illegible]

(٧٧) . . . [illegible]

(٧٨) . . . [illegible]

[illegible]

وهذا المقدار يستخرج بسهولة من معادلة (١٢) لانه اذا ضربت مقامات الحدين الموضوعين بين خافقتين ونعنى بالخافقتين قوسين الحاصرتين المعتين في مربع ... في قانون ٨٢) ولوحظ ... قوة $\frac{3}{2}$ الكمية ... في وَس² يحدث

$$نق = \frac{(وَس^2 + وَص^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{وَس^3 \, و^2 ص}{وَس^2}} = - \frac{(وَس^2 + وَص^2)^{\frac{3}{2}}}{وَس \, و^2 ص}$$

١٥٣ * ولتطبيق قانون (٨٢) على الامثلة نبحث عن نصف قطر الانحنا للقطع المكافى التام (شكل ٢٦) وهو الذى معادلته

$$س^2 = ع ص$$

ولذلك ناخذ تفاضل هذه المعادلة فيوجد $٢ س وَس = ع وَص$ ومنه يحدث

$$\frac{وَص}{وَس} = \frac{٢س}{ع} \quad \text{ثم يوجد}$$

$$\frac{و^2 ص}{وَس^2} = \frac{٢}{ع}$$

وبهذا يؤول قانون (٨٢) الى

$$نق = \frac{\left(١ + \frac{٤س^2}{ع^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{٢}{ع}} = \frac{\left[\frac{٤}{ع^2}\left(\frac{ع^2}{٤} + س^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{٢}{ع}}$$

وباجراء رفع المضروبين الى قوة $\frac{3}{2}$ يوجد

$$نق = \frac{\frac{٨}{ع^3}\left(\frac{ع^2}{٤} + س^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{٢}{ع}} = \frac{\left(\frac{ع^2}{٤} + س^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{ع^2}{٤}} \quad \ldots\ldots (٨٣)$$

ولكن مقدار الخط العمودى للقطع المكافى يساوى $\left(\frac{ع^2}{٤} + س^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$نق = - \frac{\left(1 + \frac{و ص^2}{و س^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{و^2 ص}{و س^2}}$$

* ١٥٠ * تعيف الاشارة متعلق بوضع نق فاذا كان تقعير

المنحنى متجها نحو محور الآفاق كان $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ سالبا على ما فى بند (١١٣)

ولا بد أن يكون نق عند ذلك موجبا يؤخذ نق باشارة السلب ويوضع

$$نق = - \frac{\left(1 + \frac{و ص^2}{و س^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{و^2 ص}{و س^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٨٢)$$

لانه متى يتجه تقعير المنحنى نحو محور الآفاق يقوم $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ مقام الكمية

السلبية التى اذا وضعت فى مقدار نق جعلته موجبا

* ١٥١ * الدائرة التى اعتبرناها يقال لها الدائرة الالتصاقية ويقال

لنصف قطرها نصف قطر الانحنا ويعلم من ذلك انه لا يلزم لايجاد نصف قطر

الانحنا لاى منحن الا معرفة معادلة هذا المنحنى لنستخرج منها المعادلات

التفاضلية اللازم وضعها فى قانون (٨٢)

واذا لزم انه يوجد المنحنى تحدبه نحو محور الآفاق يجعل مقدار نق متبوعا

باشارة موجبة

* ١٥٢ * وقد يرقم مقدار نق احيانا بهذه الصورة

$$نق = - \frac{(و س^2 + و ص^2)^{\frac{3}{2}}}{و س \, و^2 ص}$$

وهذا

على المنحنى

* ١٥٦ * اذا رسمت من جميع نقط منحنى ويكن م مَ مً .. الخ (شكل ٢٨) انصاف اقطار منحنية م و و مَ وَ و مً وً .. الخ احدثت نقط و و وَ و وً .... الخ التى هى مراكز الدوائر الالتصاقية المارة بنقط م و مَ و مً .... الخ خطا منحنيا جميع نقطه توجد تحت قاعدة واحدة داخلة فى معادلة منحنى م مَ مً .... الخ لانه متى يعلم هذا المنحنى تنتج منه مواضع جميع تلك النقط) وذلك المنحنى يعنى المركب من نقط و وَ وً .. الخ يسمى مفرود منحنى م مَ مً .. الخ ومنحنى م مَ مً .. الخ يقال له الانفراد اذا اعتبر بالنسبة الى المفرود

* ١٥٧ * متى ينتقل من نقطة الى اخرى من المفرود فلا تتغير كميتا س و ص فقط ولكن تتغير ايضا كميات ر و ذ و نق معا لان كميتى ر و ذ هما على وجه العموم بعدا مركز الدائرة الالتصاقية وحيث ان المفرود متكون من جملة هذه المراكز يعلم ان كميتى ر و ذ بعد هذا المنحنى يعنى بعدا اى نقطة منه فيتغيران من نقطة الى اخرى من المنحنى وكذا تتغير كمية نق التى هى نصف قطر الدائرة الالتصاقية وتبين بعد اى نقطة من المفرود الى أخرى من الانفراد ومن ثم يكون بأخذ تفاضل معادلة (٧٨) بالنسبة الى جميع المجهول [ولا يمكن أخذ تفاضل معادلة (ص ـ ذ)² + (س ـ ر)² = نق² ومشتقاتها بخلاف ذلك وما يتراءى من العمل بخلاف ذلك فى استنتاج معادلات (٧٥)(٧٦) من معادلة (٧٤) يجاب عنه انه حيث كانت هذه المعادلة تحتوى على ثابتين غير معينتين ربما امكن تعيين هذه الثوابت بواسطة شرط كون الدوال المبينة بالاطراف الاول لمعادلات (٧٥) و (٧٦) تجعل مساوية للصفر وبدون ذلك لم يمكن نستدل على انه يستلزم من وقوع معادلة (٧٤) وقوع معادلات (٧٥) و(٧٦)] وبالقسمة على وس

(ص ـ ذ) و²ص/وس² + وص²/وس² ـ وص/وس × وذ/وس + ١ ـ ور/وس = ٠

فا ٣٢

فيتقرر [illegible] نصف قطر الانحنا [illegible] يساوى مكعب [illegible]
[illegible] مقسوم على مربع [illegible] وباحث عن نصف قطر
[illegible] [illegible] = [illegible] + [illegible] الدالة على جميع الخطوط
[illegible] بحسب [illegible] يتحقق صحة ما ذكر بجميع المنحنيات
[illegible]

[illegible] ويمكن ان نستعمل الدائرة الالتصاقية فى تقدير انحنا اى [illegible] نقطة [illegible] م (شكل ٢٥) لانه اذا رسمنا من هذه النقطة قوس [illegible] جدا [illegible] بنصف قطر يساوى نصف قطر الانحنا فى [illegible] هذه النقوس كقوس من المنحنى لانه يكاد أن ينطبق عليه [illegible] حيث ان انحنا [illegible] يكبر كلما صغر نصف قطره يعلم من ذلك [illegible] كبر انحنا المنحنى وصغره بواسطة صغر نصف قطر انحنائه [illegible]

[illegible] اعتبرنا مثلا معادلة (٨٣) التى يحدث منها نصف قطر الانحنا للقطع المكافئ شاهدنا [illegible] يكون فى رأس المنحنى التى فيها $س = ٠$ مقدار نصف قطر الانحنا هكذا $نق = \frac{ع}{٢}$ وحيث انه متى تزداد $س$ على التوالى تزداد كمية [illegible] يستدل بذلك على ان انحنا القطع المكافئ يأخذ فى النقص كلما ابعد عن رأسه

* ١٥٥ * حيث ان كمية $\frac{وص}{وس}$ تبين ظل الزاوية التى تقع بين المماس فى نقطة م (شكل ٢٧) وبين محور الآفاق فمعادلة الخط العمودى المار بالنقطة التى ابعادها $ر$ و $و$ تكون

$$ص - و = - \frac{وص}{وس} (س - ر)$$

وهذه المعادلة هى كمعادلة (٧٨) التى فيها $ر$ و $و$ يبينان بعدى مركز الدائرة الالتصاقية فيرى من ذلك ان نصف قطر هذه الدائرة هو خط عمودى

على

قطر الانحنا المذكور لكن معادلة (٨٤) هى ايضا معادلة المماس المار بنقطة من المفروض ابعادها ر و و [وليتأمل انه حيث كان ر و و رمزا فى العموم لبعدى نقطة ما من المنحنى المفروض فمعادلة هذا المنحنى تكون و = ق ر ومن ثمة تبين كمية $\frac{ء و}{ء ر}$ على موجب ماهو مقرر فى بند (٧١) الزاوية التى يحدثها المماس فى نقطة (ر و و) مع محور الآفاق] فيعلم من ذلك ان نصف قطر الانحنا يماس المفروض

* ١٥٩ * حيث كانت المواد الآتية تتعلق بتفاضل القوس لاى منحن يجب علينا أن نقدم هذه القضية فنقول لتكن كمية ع عَ = هـ ما تفرض زيادتها على أفق اع = س المبين فى (شكل ٣١) فاذا رسمنا خط م و موازيا لمحور الآفاق كان وتر م مَ = $\sqrt{م و^٢ + مَ و^٢}$ = $\sqrt{هـ^٢ + مَ و^٢}$

ولكن مَ و = ق(س + هـ) − ق س = $\frac{ء ص}{ء س}$ هـ + $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ $\frac{هـ^٢}{١ \times ٢}$ + الخ

فنضع هذا المقدار فى كمية م مَ ونرمز برموز ح٣ و ح٤ و ح٥ .... الخ لمكررات كميات هـ^٣ و هـ^٤ و هـ^٥ ..... الخ ليحدث لنا

$$م مَ = \sqrt{هـ^٢ + \frac{ء ص^٢}{ء س^٢} هـ^٢ + ح_٣ هـ^٣ + ح_٤ هـ^٤ \ ...... \ الخ}$$

وبقسمة الطرفين على هـ يكون

$$\frac{م مَ}{هـ} = \sqrt{١ + \frac{ء ص^٢}{ء س^٢} + ح_٣ هـ + ح_٤ هـ^٢ + \ ...... \ الخ}$$

وبناء على ان القوس الذى يرمز له برمز قو ينطبق على وتره فى حالة التحديد يوجد من المعادلة الاخيرة

$$\frac{ء قو}{ء س} = \sqrt{١ + \frac{ء ص^٢}{ء س^٢}}$$

وبطرح معادلة (٧٩) من هذه المعادلة يبقى

$$-\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}\cdot\frac{\text{وا و}}{\text{وا س}}-\frac{\text{وا ر}}{\text{وا س}}=٠$$

ويستخرج من ذلك

$$\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}=-\frac{\frac{\text{وا ر}}{\text{وا س}}}{\frac{\text{وا و}}{\text{وا س}}}=-\frac{\text{وا ر}}{\text{وا س}}\times\frac{١}{\frac{\text{وا و}}{\text{وا س}}}$$

وحيث يعلم من بند (٦٧) ان $\frac{١}{\frac{\text{وا و}}{\text{وا س}}}=\frac{\text{وا س}}{\text{وا و}}$ يكون

$$\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}=-\frac{\text{وا ر}}{\text{وا س}}\times\frac{\text{وا س}}{\text{وا و}}$$

ويكون بموجب بند (٢٤)

$$\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}=-\frac{\text{وا ر}}{\text{وا و}}$$

واذا وضعنا مقدار $\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}$ هذا فى معادلة (٧٨) حدث

$$\text{ص}-\text{و}=\frac{\text{وا و}}{\text{وا ر}}(\text{س}-\text{ر})\cdots\cdots(٨٤)$$

* ١٥٨ * قد رأينا فى بند (١٥٥) ان معادلة

$$\text{ص}-\text{و}=-\frac{\text{وا س}}{\text{وا ص}}(\text{س}-\text{ر})$$

هى معادلة نصف قطر الانحنا المار بالنقطة التى ابعادها س و ص

فبتبديل $-\frac{\text{وا س}}{\text{وا ص}}$ بكمية $\frac{\text{وا و}}{\text{وا ر}}$ لم تزل هذه المعادلة دالة على نصف

قطر

وبقسمة الاولى من هاتين المعادلتين على الثانية يوجد

$$و نق = - \sqrt{و^2 ر + و^2 ز}$$

وحيث انه يوجد فى بند (١٦٠) بالرمز برمز قو القوس من المفروض

$$و قو = \sqrt{و^2 ر + و^2 ز}$$

فاذا طربقت هذه المعادلة بالسابقة حدث من ذلك

$$و نق = - و قو \quad أو$$

$$و نق + و قو = ٠ \quad أو$$

$$و (نق + قو) = ٠$$

وبسبب كون كل دالة تفاضلها صفر هى كمية ثابتة يعلم ان حاصل جمع نق + قو يبين كمية ثابتة و ينبنى على ذلك انه بازدياد نصف قطر الانحنا ينقص القوس المرموز له برمز قو بمقدار تلك الزيادة والعكس بالعكس وتشرح هذه القضية بهذه الكيفية وهى ان نصف قطر الانحناء يتغير بفروقات مساوية لفروقات التى تحدث عند تغير القوس من المفروض

* ١٦٢ * ليكن (شكل ٢٩) م و = نق و وب = قو و م َو َ = نق َ و و َب = قو َ فيجد لاجل نصف قطر الانحنا م و

$$نق + قو = ثابتة \quad أو$$

$$م و + قوس وب = ثابتة \quad .... \quad (٨٦)$$

وكذا يوجد لاجل نصف قطر الانحناء م َو َ هذه المعادلة

$$نق َ + قو َ = ثابتة \quad أو$$

$$م َو َ + قوس و َب = ثابتة \quad .... \quad (٨٧)$$

وحيث ان الاطراف الثانية لمعادلتى (٨٦) و (٨٧) تبين كمية ثابتة واحدة على ما بينه البند المتقدم يوجد من ذلك

$$م َو َ + قوس و َب = م و + قوس و ب \quad أو$$

$$م َو َ - م و = قوس وب - قوس و َب = قوس و و َ$$

ويستخرج من ذلك بواسطة ضرب الطرفين في واسطة

و'و = ٢ √(وس^٢ + وص^٢) وهو المطلوب

١٦٠ * وبهذه الكيفية يوجد لاجل المفرود الذي ابعاده ر و

و'و = ٢ √(ور^٢ + وو^٢)

١٦١ * نأخذ الآن تفاضل معادلة (٧٧) بالنسبة لجميع الحروف فيحدث لنا

(ص ـ و) (وص ـ و'و) + (س ـ ر) (وس ـ ور) = نق ونق

ويحدث من معادلة (٧٨)

(ص ـ و) وص + (س ـ ر) وس = ٠

فاذا طرحنا هذا الناتج من المعادلة السابقة بقي لنا

ـ (ص ـ و) و'و ـ (س ـ ر) ور = نق ونق .... (٨٥)

واذا وضعنا في معادلة (٨٥) هذه وفي معادلة (٧٧) مقدار ص ـ و المستخرج من معادلة (٨٤) حدثت لنا هاتان المعادلتان

(و'و / ور) (س ـ ر) ـ (س ـ ر) ور = نق ونق

(و'و^٢ / ور^٢) (س ـ ر)^٢ + (س ـ ر)^٢ = نق^٢

ولما يوضع س ـ ر مضروبا مشتركا ويؤخذ الجذر التربيعي للمعادلة الثانية تؤول هاتان المعادلتان الى

ـ (س ـ ر) (و'و^٢ + ور^٢) / ور = نق ونق

(س ـ ر) √(ور^٢ + و'و^٢) / ور = نق

وبقسمة

$$\left(\frac{\text{س}^{2}}{\text{ح}}-\text{و}\right)\frac{2\text{س}}{\text{ح}}+\text{س}-\text{ر}=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٨٨)$$

$$\left(\frac{\text{س}^{2}}{\text{ح}}-\text{و}\right)\frac{2}{\text{ح}}+\frac{4\text{س}^{2}}{\text{ح}^{2}}+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٨٩)$$

ثم تطرح معادلة (٨٨) من معادلة (٨٩) بعد ضربها في س فيبقى

$$\text{ر}+\frac{4\text{س}^{3}}{\text{ح}^{2}}=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٩٠)$$

وغير ذلك يوجد بضرب معادلة (٨٩) في ح^{2} واختصارها

$6\text{س}^{2}-2\text{ح}\,\text{و}+\text{ح}^{2}$ ومنه يستخرج

$$\text{و}=\frac{3\text{س}^{2}}{\text{ح}}+\frac{\text{ح}}{2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٩١)$$

وبحذف س من بين معادلتي (٩٠) و (٩١) توجد معادلة المفرود لكن قبل أن تعمل هذه العملية ننبه ان معادلتي (٩٠) و (٩١) يؤولان لاجل النقطة الاصلية التي فيها $\text{س}=0$ الى $\text{ر}=0$ و $\text{و}=\frac{\text{ح}}{2}$ فنأخذ اذن $\text{ا ب}=\frac{\text{ح}}{2}$ (شكل ٣٢) فتوجد نقطة ب من المفرود ثم يرى بواسطة معادلة (٩١) انه بأخذ متغير س مقادير موجبة اوسالبة يزداد متغير و كلما ازدادت هذه المقادير وينتج من ذلك ان المفرود يتركب من طيتين ب ح و ب ى

* ١٦٦ * ولاجل حذف س من بين معادلتي (٩٠) و (٩١) تربع الاولى بعد أن يستخرج منها س^{3} فيوجد

$$\text{س}^{6}=\text{ر}^{2}\frac{\text{ح}^{4}}{16}$$

ثم يستخرج من معادلة (٩١)

$\text{س}^{2}=\left(\text{و}-\frac{\text{ح}}{2}\right)\frac{\text{ح}}{3}$ وبتكعيب الطرفين يكون

$$\text{س}^{6}=\left(\text{و}-\frac{\text{ح}}{2}\right)^{3}\frac{\text{ح}^{3}}{27}$$

وبمساواة مقداري س^{6} ببعضهما وقسمة الناتج على ح^{3} يوجد

$$\text{ر}^{2}\frac{\text{ح}}{16}=\left(\text{و}-\frac{\text{ح}}{2}\right)^{3}\frac{1}{27}$$

واذا رمزنا برمز وَ لكمية $\text{و}-\frac{\text{ح}}{2}$ وضربنا طرفي هذه المعادلة في ٢٧ يحدث

$$\text{وَ}^{3}=\frac{27}{16}\,\text{ح}\,\text{ر}^{2}=\text{ه}\,\text{ر}^{2}$$

ويعلم من ذلك ان الفرق بين اى نصفى قطرين من انصاف الاقطار الانحنائية يساوى القوس المحصور بينهما أبدا

* ١٦٣ * وينتج من ذلك انه اذا ثنى خيط على المفرود الذى هو وسـ (شكل ٤٩) وانتهى مماسا به وكان مثبتا فى نقطة م من الانفراد الذى هو م ح ثم فرد هذا الخيط بابقائه مشدودا على الدوام رسم طرفه م فى تحركه منحنى الانفراد م ح لانه اذا أتى فى موضع وَمَ بتحركه يزداد بقدر قوس ووَ ومن ثمة يساوى فى الطول نصف قطر الانحناء الذى يمر بنقطة و ومنه يفهم ان طرف مَ لهذا الخيط يكون موجودا على المنحنى الانفرادى

* ١٦٤ * وهاهى كيفية ايجاد معادلة المنحنى المفرود

يستخرج اولا من معادلة المنحنى المراد ايجاد مفروده مقادير صـ والمكتررات التفاضلية $\frac{\text{و صـ}}{\text{و سـ}}$ و $\frac{\text{و}^2\text{صـ}}{\text{و سـ}^2}$ الخ ثم توضع هذه المقادير فى معادلات (٧٨) و(٧٩) فيحدث من ذلك معادلتان مشتملتان على متغير سـ فيحذف هذا المتغير من بينهما فتنشأ عن ذلك معادلة محتوية على و و ر فتكون هى معادلة المنحنى المفرود المطلوبة

* ١٦٥ * ولنعين بهذه الطريقة مفرود القطع المكافى الذى معادلته $\text{سـ}^2 = \text{ح صـ}$ فنأخذ تفاضل هذه المعادلة ليستخرج منه

$$\text{٢سـ وسـ} = \text{ح وصـ} \quad \text{ومن ثمة} \quad \frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}} = \frac{\text{٢سـ}}{\text{ح}}$$

$$\text{و} \quad \frac{\text{و}^2\text{صـ}}{\text{وسـ}^2} = \frac{٢}{\text{ح}}$$

فتوضع فى معادلات (٧٨) و (٧٩) مقادير صـ و $\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}}$ و $\frac{\text{و}^2\text{صـ}}{\text{وسـ}^2}$ هذه فتحدث المعادلتان المشتملتان على سـ

$(\frac{\text{سـ}^2}{\text{ح}}$

لافق واحد س + هـ يكون

(ح – ح′) هـ² ÷ ١.٢ + الخ ...... (٩٣)

وقد فرضنا ان الافقى س – هـ يلزم تغير كمية هـ بكمية – هـ
في الاحداثيين فيكون في

– (ح – ح′) هـ² ÷ ١.٢ – الخ .... (٩٤)

وحيث كان الحد الاول من متسلسلتي (٩٣) و (٩٤) يمكن أن يفوق
مجموع الحدود الباقية بأخذ كمية هـ صغيرة على قدر الكفاية ينتج منه ان
فضل الاحداثيين يتغير في الاشارة متى تغير الافقي س – هـ بعد ان كان
س + هـ وينبني على ذلك انه اذا كان فرق الاحداثيات الموافقة للافقي
س + هـ كمية موجبة بأخذ (شكل ٣٦) ن ن′ = ح ح′ = هـ
معناها انه اذا كان الرأسي ح م′ للمنحني يفوق ن ن′ يكون الرأسي
ح′ ق′ للاتصالي فائقا الرأسي ح′ م′ للمنحني وينتج من ذلك ان الاتصالي
يوجد في احد الوجهين فوق المنحني وفي الوجه الآخر تحته فاذن يقطعه
وهذا ما أردنا بيانه

وما ذكر بخصوص الدائرة التي هي التصاقي برتبة ثانية يمكن تطبيقه على جميع
الاتصاليات المزدوجة الرتبة

* ١٦٩ . ويتضح من بعد الاثبات السابق انه متى كان الاتصال
برتبة مفردة كان مماسا بالمنحني ولا يقطعه وهو نفس ما برهن عند الاثبات السابق

* ١٧٠ . ولنذكر قضية نزعو دبانبتها في بند (١٧٠) على
النقط المذكورة على ما هو مشروح في بند (١٣٨) فنقول اذا كانت
المنحنيات المجتمعة في احدى هذه النقط لها مماس مشترك ولتكن معادلته
ص = ح س + د تغير س بكمية ح س + ك في ذاتية
معادلتي (٩٠) فيحدث من ذلك $\frac{و ص}{و س}$ أو ح = ح وجميع المقادير
الاخر لهذه المعادلة تكون صفرا وبسبب كون المماس التصاقيا برتبة

يجعل ... = ... وتؤول النقطة الاصلية حينئذ الى ب حيث ان
و = ٠ و ب = ... ويعلم بالسهولة كون طرفي ب ح و ب ء يتقعران
نحو محور الآفاق لانه بأخذ تفاضل معادلة

$$و^{3} = ر^{2} \quad أو \quad و = ر^{\frac{2}{3}} \quad \text{يوجد}$$

$$\frac{ء^{2}و}{ءر^{2}} = -\frac{2}{9}\, ر^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}\sqrt[3]{\frac{1}{ر^{4}}}$$

وهذا المقدار موجب سواء كانت ر موجبة أو سالبة فيستدل بذلك
على ان كلا من طرفي المنحني تتقعر نحو محور الآفاق)

* ١٦٧ * وضع الالتصاق يكون بكيفيتين مختلفتين بالنظر للمنحني
الواقع بينه وبينه التماس اوليهما أن توجد طرفاه معا فوق المنحني
كما في (شكل ٣٣) اوتحته كما في (شكل ٣٤)
وحينئذ لا يقع بين الالتصاق والمنحني الا تماس فقط
وثانيهما أن تكون احدى طرفي الالتصاق موجودة فوق المنحني والاخرى
تحته كما في (شكل ٣٥) وفي هذه الحالة يقطع الالتصاق المنحني في نقطة م

* ١٦٨ * تثبت الآن ان الدائرة الالتصاقية تقطع المنحني (شكل ٣٦)
ولذلك نرمز برمزي $ص_{1}$ و $ص'_{1}$ لراسيين احدهما وهو الاول موافق
للمنحني وثانيهما موافق للالتصاق ونفرض ايضا ان هذين الراسيين يطابقان
لافق واحد وهو $س + ه$ فيوجد

$$\left.\begin{aligned} ص_{1} &= ء(س+ه) = ءس + حه + ح_{1}ه^{2} + ح_{2}ه^{3} + \cdots \text{الخ} \\ ص'_{1} &= ء'(س+ه) = ء'س + ح'ه + ح'_{1}ه^{2} + ح'_{2}ه^{3} + \cdots \text{الخ} \end{aligned}\right\} \quad (٩٣)$$

وحيث كانت الدائرة التصاقية برتبة ثانية يلزم أن تكون الثلاثة حدود
الاول من هذين الحلين متساوية ويعلم من ذلك ان الفرق بين الراسيين المطابقين

لافق

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}\,،\,\text{ص}) = \text{ع} + \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^2\text{ع}}{\text{وس}^2}\,\frac{\text{هـ}^2}{2} + \frac{\text{و}^3\text{ع}}{\text{وس}^3}\,\frac{\text{هـ}^3}{2\times 3} + \cdots \text{الخ} \cdots \quad (٩٥)$$

وكمية هـ توجد لا محالة في هذا الحل و ص لا تدخل الا في دوال

$$\text{ع} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وع}}{\text{وس}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^2\text{ع}}{\text{وس}^2} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^3\text{ع}}{\text{وس}^3} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \text{الخ}$$

فاذا غيرت ص بكمية $\text{ص}+\text{ك}$ في هذه الدوال لزم أن تغير في معادلة (٩٥)

$$\text{ع} \;\text{بكمية}\; \text{ع} + \frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{ك} + \frac{\text{و}^2\text{ع}}{\text{وص}^2}\,\frac{\text{ك}^2}{2} + \frac{\text{و}^3\text{ع}}{\text{وص}^3}\,\frac{\text{ك}^3}{2\times 3} + \cdots \text{الخ}$$

$$\text{و}\;\frac{\text{وع}}{\text{وس}} \;\text{بكمية}\; \frac{\text{وع}}{\text{وس}} + \frac{\text{و}.\frac{\text{وع}}{\text{وس}}}{\text{وص}}\,\text{ك} + \frac{\text{و}^2.\frac{\text{وع}}{\text{وس}}}{\text{وص}^2}\,\frac{\text{ك}^2}{2} + \frac{\text{و}^3.\frac{\text{وع}}{\text{وس}}}{\text{وص}^3}\,\frac{\text{ك}^3}{2\times 3} + \cdots \text{الخ}$$

$$\text{و}\;\frac{\text{و}^2\text{ع}}{\text{وس}^2} \;\text{بكمية}\; \frac{\text{و}^2\text{ع}}{\text{وس}^2} + \frac{\text{و}.\frac{\text{و}^2\text{ع}}{\text{وس}^2}}{\text{وص}}\,\text{ك} + \frac{\text{و}^2.\frac{\text{و}^2\text{ع}}{\text{وس}^2}}{\text{وص}^2}\,\frac{\text{ك}^2}{2} + \frac{\text{و}^3.\frac{\text{و}^2\text{ع}}{\text{وس}^2}}{\text{وص}^3}\,\frac{\text{ك}^3}{2\times 3} + \cdots \text{الخ}$$

الخ و الخ و الخ و الخ

وترقم سطور بقدر ما في معادلة (٩٥) من الحدود فيوجد

$$(٩٦)\quad \begin{cases} \text{د}(\text{س}+\text{هـ}\,،\,\text{ص}+\text{ك}) = \text{ع} + \frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{ك} + \frac{\text{و}^2\text{ع}}{\text{وص}^2}\,\frac{\text{ك}^2}{2} + \text{الخ} \\ \qquad + \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}.\frac{\text{وع}}{\text{وس}}}{\text{وص}}\,\text{هـ}\,\text{ك} + \text{الخ} \\ \qquad + \frac{\text{و}^2\text{ع}}{\text{وس}^2}\,\frac{\text{هـ}^2}{2} + \text{الخ} \\ \qquad + \text{الخ} \end{cases}$$

أولى تساوى كمية $ءس + حه$ كمية $ءس + ح^٢ه$ وبذلك يؤول فرق معادلتى (٩٢) الى

$$ص - ص' = \text{أ}ه^١ + \text{ب}ه^٢ + \ldots\ldots \text{ الخ}$$

وفرق الرأسيين هذا يلزم أن يوجد له مقداران $كم$ و $كم'$ (شكل ٣٠) ولذلك يجب أن يكون لاحد المكررات التفاضلية المتبينة بهذه الرموز

أ و ب ...... الخ مقداران وليكن $\frac{و^ن ص}{و س^ن}$ هو هذا المكرر

التفاضلى لكن حيث انه اذا أخذت التفاضلات المتوالية لمعادلة $ح و س + ك و ص = ٠$ لايزال حد $ك$ باقيا مضروبا فى التفاضل برتبة عليا لكمية $ص$ فى كل تفاضل فعل على ماتقرر فى بند (١٤٣) يعلم من ذلك ان التفاضل برتبة $ن$ للدالة المفروضة يمكن وضعه هكذا

$$ك\frac{و^ن ص}{و س^ن} + \text{أ} = ٠$$ ويلزم أن يوجد للمكرر $\frac{و^ن ص}{و س^ن}$ التفاضلى

مقداران ويثبت ان كمية $ك$ تكون صفرا كما فى بند (١٣٧) و بمقدار $ك$

هذا يؤول مقدار $ح$ الى صفر ايضا وتؤول معادلة $\frac{و ص}{و س} = -\frac{ح}{ك}$.

حينئذ الى $\frac{و ص}{و س} = \frac{٠}{٠}$ وهو المراد اثباته

(تطبيق قضية تيلور على الدوال المتزايدة التى بمتغيرين)

* ١٧١ * متى تغير فى دالة $ع$ المشتملة على متغيرين $س$ و $ص$ غير المرتبطين متغير $س$ بكمية $س + ه$ ومتغير $ص$ بكمية $ص + ك$ يمكن حل هذه الدالة بواسطة قضية تيلور لانه اذا استبدلت اولا كمية $س$ بكمية $س + ه$ يوجد

ضرب متغيرين اري [illegible] ة بمتغيرين اختياري ويعرف [illegible] ن ترتيب
المكررات التفاضلية بدرجة على شرط اختياري بمساواة المكررات التفاضلية
[illegible] ود الاخر من معـ [illegible] ق (٩٦) و (٩٦) بعضها لبعضه علم

* في نهايات كبرى و صغرى [illegible] ى بمتغيرين *

١٧٣ • قد رأينا في بند (١٧١) انه اذا غير س بكمية س + هـ ومتغير ص بكمية ص + ك في الدالة المشتملة على متغيري س و ص غير المرتبطين يعلم حل ع او ع (س + هـ و ص + ك) بمعادلة (٩٦) فاذا بينا ع (س + هـ و ص + ك) في هذه المعادلة

برمز ع' و ك برمز م هـ و $\frac{\text{و}^{\text{ا}}\text{ع}}{\text{و ص}}$ برمز $\frac{\text{و}^{\text{ا}}\text{ع}}{\text{و س و ص}}$ نجد

$$\text{ع}' = \text{ع} + \text{هـ}\left(\frac{\text{و ع}}{\text{و س}} + \frac{\text{و ع}}{\text{و ص}}\,\text{م}\right) + \frac{\text{هـ}^{2}}{2}\left(\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س}^{2}} + 2\,\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س و ص}}\,\text{م} + \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و ص}^{2}}\,\text{م}^{2}\right)$$

+ الحدود المحتوية على هـ^{3} و هـ^{4} .. الخ .. (٩٨)

ولاجل أن تكون ع نهاية كبرى او صغرى يلزم أن نجعل بعض المقادير المعطاة الى هـ و ك كمية ع' اكبر من ع ابدا او اصغر منها ابدا

ولا يتم ذلك الا اذا كان حد $\text{هـ}\left(\frac{\text{و ع}}{\text{و س}} + \frac{\text{و ع}}{\text{و ص}}\,\text{م}\right)$ صفرا لانه اذا لم يكن

كذلك أمكن صيرورة هذا الحد اكبر من حاصل الجمع الجبري لجميع الحدود التي تليه بواسطة مقدار لائق لكمية هـ كما في بند (١٩) وبأخذ هذا المقدار على التعاقب موجبا وسالبا تصير ع' في احدى الحالتين اكبر من كمية ع وفي الاخرى اصغر منها ويعلم حينئذ انه لتكون دالة ع هذه نهاية كبرى ونهاية صغرى يلزم ان يوجد

$$\text{هـ}\left(\frac{\text{و ع}}{\text{و ص}}\,\text{م} + \frac{\text{و ع}}{\text{و س}}\right) = 0 \quad [illegible]$$

١٢٦ ... تبديل وجهها كسيرحد اولا بتغيير
ص بكمية ص ...

$$\text{د}(\text{س، ص}+\text{ك}) = \text{ع} + \frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{ك} + \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{وص}^{2}}\,\frac{\text{ك}^{2}}{2} + \frac{\text{و}^{3}\text{ع}}{\text{وص}^{3}}\,\frac{\text{ك}^{3}}{2\times 3} + \,..\,\text{الخ}$$

ثم نغير بوضع س + هـ بدل س فاكمية الى هذا الناتج

$$\left.\begin{aligned}
\text{د}(\text{ص}+\text{ك، س}+\text{هـ}) &= \text{ع} + \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{وس}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{2} + \,..\,\text{الخ}\\
&+ \frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{ك} + \frac{\text{و}\cdot\frac{\text{وع}}{\text{وص}}}{\text{وس}}\,\text{ك هـ} + \,..\,\text{الخ}\\
&+ \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{وص}^{2}}\,\frac{\text{ك}^{2}}{2} + \,..\,\text{الخ}\\
&+ \,..\,\text{الخ}
\end{aligned}\right\}\quad(٩٧)$$

وحيث كان الترتيب الذى فعلت به هذه التبديلات بالاختيار لانه يجب وضع س + هـ فى جميع المحلات التى تدخل فيها س ووضع ص + ك فى جميع المواضع التى تدخل فيها ص فلا تؤثر هذه العمليات على بعضها ومنه ينتج وجوب تطابق حلى (٩٦) و (٩٧) وعليه ينبغى اتحاد مقادير الحدود المتبوعة بحواصل ضروب متحدة فى هـ و ك فاذا ساوينا

الحدود المضروبة فى هـ ك ببعضها نجد
$$\frac{\text{و}\cdot\frac{\text{وع}}{\text{وس}}}{\text{وص}} = \frac{\text{و}\cdot\frac{\text{وع}}{\text{وص}}}{\text{وس}}$$

او وهو الاولى
$$\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{وس وص}} = \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{وص وس}}$$

ويفهم من هذه المعادلة ان ترتيب التفاضل فى اخذ التفاضل الثانى لحاصل

ضرب

تكون موجبة واشارة كمية (١٠٠) تتعلق باشارة ح واذن توجد نهاية كبرى اونهاية صغرى بحسب كون ح سالبة أوموجبة يعنى بحسب اشارة $\frac{و أ ع}{و اص ا}$ المتحدة مع اشارة $\frac{و أ ع}{و س ا}$ حيث انه شوهد أن ح و ح يفرضان باشارة واحدة

(فى تحويل الاحداثيات المستقيمة الى احداثيات قطبية)

* ١٧٥ نعتبر منحنى س ء ح (شكل ٧٩) المتعين فيه موضع نقطة م بواسطة الاحداثيات المستقيمة اع = س و م ع = ص وهذه النقطة يمكن تعيينها كذلك اذا علمت زاوية م ا ح والمصف قطر الاحتراقى ام ولما كانت الزوايا تقاس بالاقواس عدة متبدلات زاوية م ا ح بقوس م و المرسوم بنصف قطر مأخوذ وحدة يمكن استعواض الاحداثيات القطبية التى هى م و = ب و ام = ع بالاحداثيات المستقيمة اع = س و م ع = ص

* ١٧٦ * ولنتأمل ان مبدأ الآفاق قد يكون بعض الاوقات غير نقطة و لانه يمكن تعيين نقطة م كذلك اذا اعتبرت نقطة و نقطة الابتداء وعلم قوس و م ونصف قطر ام الاحتراق وفى هذه الحالة يمكنا أن نرمز لقوس و م برمز ب وحينئذ يتبع ان الآفاق تقاس من المبدأ و وتختلف عن الآفاق المحسوبة من مبدأ و بقدر ثابت هى و و وتوجد بينهما اى بين الآفاق المتحسبة هذه المعادلة

$$ب = ب - و و$$

وحيث انه يمكن بواسطة هذه المعادلة تغيير المبدأ بما يناسب مرض ان هذا المبدأ يكون و لاجل السهولة

* ١٧٧ ولتكن الآن د(س و ص) = ٠ المعادلة التى يرد أن تتغير فيها الاحداثيات المستقيمة اع = س و ع م = ص بالاحداثيات القطبية و م = ب و ام = ع فنبحث عن

$$\frac{و ا ع}{و ا ص} م + \frac{و ا ع}{و ا س} = ٠$$

وحيث كانت الزيادة ك حيث ما اتفقت تكون م كذلك ولا تزال المعادلة حينئذ واقعة مهما كانت م وذلك يقتضى أن تنقسم هذه المعادلة الى هاتين

$$\frac{و ا ع}{و ا ص} = ٠ \quad و \quad \frac{و ا ع}{و ا س} = ٠$$

* ١٧٤ * نبحث الآن عما يميز النهاية الكبرى من الصغرى ولذلك ننبه انه حيث كان الحد المشتمل على ه صفرا فالحد المحتوى على ه^٢ يكون هو المتمتع باشارة حاصل الجمع الجبرى لجميع الحدود التى تأتى بعد ع ويلزم حينئذ أن الحد المشتمل على ه^٢ ان كان غير صفر لا يكون متعينا بواسطة مقادير ه و ك موجبا تارة وسالبا أخرى والا لكانت ع١ فى احدى الحالتين اصغر من ع وفى الحالة الاخرى اكبر منها وحيث كان الامر كذلك فنشرع فى البحث عن الشرط اللازم وقوعه ليحفظ الحد المشتمل على ه^٢ اشارة واحدة مهما كانت المقادير المعطاة الى كميتى ه و ك وفى هذا المبحث نبين الحد المحتوى على ه^٢ من معادلة (٩٨) بهذا الرمز

$$\frac{١}{٢} ه^٢ (ح م^٢ + ٢ ـ م + ع)$$

وبوضع ح مضروبا مشتركا يؤول هذا الحد الى

$$\frac{١}{٢} ح ه^٢ (م^٢ + ٢ \frac{ـ}{ح} م + \frac{ع}{ح}) \quad .... \quad (٩٩)$$

وباضافة كمية $\frac{ـ^٢}{ح^٢} - \frac{ـ^٢}{ح^٢}$ التى مقدارها صفر على ما بين الحافظتين يمكن وضع كمية (٩٩) هكذا

$$\frac{١}{٢} ح ه^٢ [(م + \frac{ـ}{ح})^٢ + \frac{ع}{ح} - \frac{ـ^٢}{ح^٢}] \quad ... \quad (١٠٠)$$

ويرى انها تكون باشارة ح متى اتحد ع و ح فى الاشارة وكان $\frac{ع}{ح} > \frac{ـ^٢}{ح^٢}$ يعنى $ع ح > ـ^٢$ لان الكمية المضروبة فى $\frac{١}{٢}$ ح ه^٢ حينئذ

تكون

وهذه معادلة مشتملة على س و ص و[illegible]

* ١٨٠ * [illegible] س و ص [illegible]

على كمية تغيرية التي [illegible] ص = [illegible] [illegible]

مشتملة على كميات [illegible] وليست [illegible] (١٠٢)

ونستعمل الطريقة الآتية حيث [illegible] هي [illegible]

د(ع و ى) = ٠ للمعادلة [illegible] لمعادلة ذات [illegible]

مستقيمة س و ص والسبب الموجب [illegible] حذف ى

من بين معادلة د(ى و ع) = ٠ و[illegible] المعادلة [illegible]

د(ى و ع و وى و وع) = ٠ هو كون مقدار ع [illegible]

بيانه على موجب بند (١٧٩) بتغيرى س و ص بدون كمية

علية ولايمكن بيان مقدار ى كذلك وبالحقيقة متى تحذف [illegible]

تكون المعادلة الحادثة مشتملة على وى و وع [illegible]

يمكن بيانها بدلالة متغيرات س و ص و وس و وص

هذا ونستخرج من معادلة (١٠١)

جتا ى = س/ع و جا ى = ص/ع .... (١٠٤)

ونقسم احدى هاتين المعادلتين على الاخرى فيوجد

جا ى/جتا ى أو ظا ى = ص/س ثم نأخذ تفاضل الطرفين [illegible]

وى/جتا² ى = (س وص − ص وس)/س²

ونبدل 1/جتا² ى بمقداره المستخرج من المعادلة الاولى من معادلتي (١٠٤) ثم نسقط القاسم المشترك س² فينشأ عن ذلك

ع² وى = س وص − ص وس ومنه يستخرج

وى = (س وص − ص وس)/ع² ..... (١٠٥)

ومن هذه تنتج بين هذه الاحداثيات وذلك بطرائق جـ

ب ـــ م جتا م ن و ن م = ام جا م اح او

س = ن جتا ى و ص = ع جا ى ...... (١٠١)

وينبغى حينئذ وضع هذه المقادير فى معادلة د(س و ص) = ٠

لتحدث المعادلة المنسوبة الى احداثيات قطبيه

* ١٧٠ ب نقطة الاصلية للاحداثيات المستقيمة س و ص

ليست هى مركز ا لنسبة (شكل ٨٠) وكان د و و الاحداثيات

مركز ا و س و ص الاحداثيات محسوبة من آ حدث

اح = آد ـــ آب و مح = مك ـــ اب

أو س = سَ ـــ د و ص = صَ ـــ و

ويلزم وضع هذه المقادير فى القوانين السابقة

(فى تحويل الاحداثيات القطبيه الى اخرى مستقيمة وتعيين الكمية التفاضلية لقوس فى منحن قطبى)

* ١٧٩ * المعادلة المنسوبة الى احداثيات قطبيه تبينها

د(ى و ع) = ٠

ويشاهد ايضا كما فى (شكل ٧٩) انه يمكن ابدال ع بمقدارها المستخرج من معادلة

ام٢ = اح٢ + حم٢ أو

ع٢ = س٢ + ص٢ ...... (١٠٢)

وبالنظر الى ى نقسم معادلتى (١٠١) على بعضهما فيوجد

ص/س = جا ى / جتا ى = ظا ى ويستخرج من ذلك

ى = قوس (ظا = ص/س)

وبوضع مقدار ى هذا مع مقدار ع فى معادلة

د(ى ، ع) = ٠ يوجد

د[قوس (ظا = ص/س) و √(س٢ + ص٢)] = ٠ ...... (١٠٣)

وهذه

(فى تحت المماس وتحت العمودى والعمودى والمماس للمنحنيات القطبية)

* ١٨٢ * حقيقة تحت المماس ح ت (شكل ٨١) فى المنحنيات ذات الاحداثيات المستقيمة هو الجزء المحصور بين موقع [illegible] الى [illegible] التى يقطع فيها خط [illegible] العمودى على هذا [illegible] وبهذا التعريف [illegible] فى المنحنيات القطبية [illegible] [illegible] ونصف قطر الاحتراق ام فتحت المماس [illegible] عمود اط المحصور بين نقطة ا ونقطة ط التى يقطع فيها المماس هذا العمود [illegible] ان تحت المماس يأخذ فى المنحنيات القطبية موضعا يخالف ما [illegible] فى المنحنيات غير القطبية وهذا واضح حيث ان تحت المماس فى المنحنيات غير القطبية يعد دائما على محور الآفاق بخلاف ما [illegible] المنحنيات القطبية فانه يتغير فى الموضع فى كل نقطة من المنحنى لان محور الآفاق المذكور لا يوجد هنالك

* ١٨٣ * نبحث الآن عن الكمية الحسابية لتحت المماس فى المنحنيات القطبية ولذلك نفرض ان ام و امَ يكونان نصفى قطرين احتراقيين (شكل ٨٢) ثم نرسم من نقطة م خط مح عمودا على نصف القطر الاحتراقى امَ ونرسم اط موازيا له عمود فيحدث من تشابه مثلثى اطمَ و حممَ هذا التناسب

$$حمَ : حم :: امَ : اط$$

الذى يستخرج منه $اط = \frac{امَ \times حم}{حمَ}$

وبمراعاة كون حم هو أحد اضلاع مثلث حممَ القائم الزاوية يصير مقدار اط هذا

$$اط = \frac{امَ \times حم}{\sqrt{ممَ^2 - حم^2}}$$

وفى حالة التحديد والنهاية يكون امَ مساويا ام يعنى ع وينطبق حم على قوس مه ووتر ممَ على قوس ممَ ويصير اط تحت

وبوضع مقدار ع عوضاعنه فى هذه المعادلة الاخيرة يكون

$$ و ى = \frac{س و ص - ص و س}{س^٢ + ص^٢} $$

وتفاضل المتغير الآخر يوجد ايضا باعظم سهولة لانه يحدث من معادلة (١٠٣)

$ ع = \sqrt{س^٢ + ص^٢} $ وبأخذ التفاضل يوجد

$$ و ع = \frac{س و س + ص و ص}{\sqrt{س^٢ + ص^٢}} $$

وبواسطة مقادير و ى و و ع و ع السابقة تتغير المعادلة الحادثة من حذف ى بمعادلة اخرى لاتحتوى الا على س و ص و و س و و ص واذن تنتسب الى احداثيات مستقيمة وتكون هى المعادلة المبحوث عنها

* ١٨١ * قد رأينا فى بند (١٠٩) ان كمية تفاضل القوس المرموز له برمز قو المنسوب الى احداثيات مستقيمة هى

$$ و قو = \sqrt{و س^٢ + و ص^٢} \quad \cdots\cdots \quad (١٠٦) $$

فيمكن تعيين تفاضل هذا القوس متى تكون الاحداثيات قطبيه وفى هذه الحالة توضع فى معادلة (١٠٦) مقادير و س و و ص المستخرجة من معادلات

$$ س = ع جتا ى ، ص = ع حا ى $$

ويوجد باخذ تفاضل هذه المعادلات

$$ و س = - ع حا ى و ى + جتا ى و ع $$
$$ و ص = ع جتا ى و ى + حا ى و ع $$

فتربع هذه المعادلات وتختصرها بمساعدة معادلة

$ حا^٢ ى + جتا^٢ ى = ١ $ فينشأ عن ذلك

$$ و قو = \sqrt{ع^٢ و ى^٢ + و ع^٢} $$

وهو تفاضل القوس بدلالة الاحداثيات القطبية

(فى

العمودى $=\sqrt{ع^{٢}-\frac{وع}{وـ}}$ و تماس $=ع\sqrt{١+ع^{٢}\,[illegible]}$

* ١٨٥ ولايجاد مقدار الحسابى لقطاع فى المنحنيات القطبية ننظر مثلث ام م (شكل ١٢) فيحدث منه

مساحة ام م $=$ ــــ

وفى نهاية تكون مساحة مثلث ام م (شكل ١٢) عبارة عن مساحة قطاع عنصرى وعمود ح م يتغير بقوس م ن الذى وجدناه يساوى ع وـ و ام يؤول الى ع فنضع هذه المقادير فى المعادلة السابقة فنجد

$$\text{مساحة القطاع العنصرى} = \frac{ع\,وـ}{٢}$$

ويمكن ايضا بيان القطاع العنصرى بدلالة الاحداثيات المستقيمة لانه بوضع مقادير ع و وـ المستخرجة من معادلات (١٠٢) و (١٠٥) فى هذه المعادلة تصير

مساحة القطاع العنصرى $= \frac{س\,وص - ص\,وس}{٢}$ وهو المراد بيانه

(فى تعين كمية نصف قطر الانحناء لمنحنى قطبى)

* ١٨٦ * قد بينا فى بند (١٤٩) مقدار نصف قطر الانحنا نسبة الاحداثيات المستقيمة ورفعنا اشكال الجذر هذا المقدار باشارة تجعل نق موجبا ولذلك وضعناه هكذا

$$نق = \frac{\left(١+\frac{وص^{٢}}{وس^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (١٠٧)$$

فلمعرفة مقدار نق هذا بدلالة الاحداثيات القطبية لا يلزم الا حذف المكررات التفاضلية الداخلة فى هذا المقدار بواسطة المعادلات الآتية وهى

س $=$ ن جتا ـ و ص $=$ ع جا ـ

المماس ولم يبق حينئذ الا البحث عن مقدارى م َم و م ن فى حالة التحديد فاقول يس لاتفاضل قوس المنحنى فيكون على موجب بند (١٨١)

$$م َم = \sqrt{ع^٢ و ا^٢ + و ع^٢}$$

والثانى وهو م ن يبحث عنه بالكمية الآتية وهو أن يقال حيث انه يحدث من قضايا ا ر ر َ و ا م ن هذا التناسب

ا ر : ر ر َ :: ا م : م ن أو

ا : ر ر َ :: ع : م ن

يكون م ن = ع × ر ر َ وهذه الكمية تؤول فى حالة التحديد الى ع و ا فنضع مقادير م ن و م م َ هذه فى مقدار ا ط بعد أن يغير ا م َ بكمية ع و ح م بكمية م ن ونختصر فنجد

$$ا ط = \frac{ع^٢ و ا}{و ع}$$ وهى كمية تحت المماس

* ١٨٤ * ولتعيين تحت العمودى نراعى انه حيث كان عمودى ع م (شكل ٨١) عموديا على المماس فرأسى ا م يكون وسطا متناسبا بين تحت المماس وتحت العمودى ومن أجل ذلك يوجد

ا ط : ا م :: ا م : تحت العمودى أو

$$\frac{ع^٢ و ا}{و ع}$$: ع :: ع : تحت العمودى ومنه يستخرج

$$تحت العمودى = \frac{و ع}{و ا}$$

وبالنظر الى الخط العمودى والخط المماس نراعى مثلثى م ا ع و م ا ط القائمى الزاوية فيحدث لنا منهما

$$م ع = \sqrt{م ا^٢ + ا ع^٢} \quad و \quad م ط = \sqrt{م ا^٢ + ا ط^٢}$$

ثم نضع فى هاتين المعادلتين مقادير م ا و ا ع و ا ط . فيوجد العمودى"

$$\frac{و^٢ عـ}{و ت} = \frac{ت و م - م و ت}{ت^٢} \quad .... \quad (١١١)$$

وبواسطة مقادير المعلومة بمعادلتى ( ) و ( ) تؤول معادلة (١٠٧)

$$\text{الى}\quad نق = \frac{(ت^٢ + م^٢)^{\frac{٣}{٢}}}{ت و م - م و ت} \quad .... \quad (١١٢)$$

ولم يبق حينئذ الا تحويل هذه المعادلة الى ذات المتغيرى ى و ع ولذلك يعين اولا مقدار ت^٢ + م^٢ باضافة مربعات معادلات (١٠٦) على بعضها وباختصار الناتج بمساعدة معادلة حا^٢ ى + جتا^٢ ى = ١ يوجد

$$ت^٢ + م^٢ = و^٢ ع^٢ + ع^٢ و ى^٢ \quad .... \quad (١١٣)$$

وبالنظر الى مقام معادلة (١١٢) نأخذ تفاضل معادلات (١٠٦) على التعاقب باعتبار و ى كمية ثابتة ثم نضرب الناتج الاول فى ت والثانى فى م فيوجد

$$ت و م = ت و^٢ ع حا ى - ٢ ت و ع جتا ى و ى - ت ع ى و ى^٢$$

$$م و ت = م و^٢ ع جتا ى - ٢ م و ع حا ى و ى - م ع جتا ى و ى^٢$$

وحين تطرح المعادلة الثانية من الاولى يوجد

$$ت و م - م و ت = \left\{\begin{array}{l} و^٢ ع (ت حا ى - م جتا ى) \\ + ٢ و ع و ى (ت جتا ى + م حا ى) \\ - ع و ى^٢ (ت حا ى - م جتا ى) \end{array}\right. \quad (١١٤)$$

واذا ضربنا ثانية معادلتى (١٠٦) فى جا ى والاولى فى جتا ى وطرحناهما من بعضهما واختصرنا الناتج بواسطة معادلة حا^٢ ى + جتا^٢ ى = ١ يوجد

$$ت حا ى - م جتا ى = - ع و ى$$

وبعمل مشابه لهذا العمل يوجد

$$ت جتا ى + م جا ى = و ع$$

واذا وضعت هذه المقادير فى معادلة (١١٤) صارت تلك المعادلة

$$ت و م - م و ت = - ع و^٢ ع و ى + ٢ و ع^٢ و ى + ع^٢ و ى^٢ \quad (١١٥)$$

ولذلك نأخذ تفاضل هذه المعادلات ثم نقسم النواتج الحادثة على بعضها فيحدث لنا

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وع حاى} + \text{ع جتاى وى}}{\text{وع جتاى} - \text{ع حاى وى}}$$

ونرمز لكميتى هذا الكسر برمزى م و ن فنجد

$$\left.\begin{array}{l} \text{م} = \text{وع حاى} + \text{ع جتاى وى} \\ \text{ن} = \text{وع جتاى} - \text{ع حاى وى} \end{array}\right\} \cdots\cdots (١٠٨)$$

واذن يكون

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \cdots\cdots\cdots (١٠٩) \text{ أو}$$

$$\frac{\text{وص}^{٢}}{\text{وس}^{٢}} = \frac{\text{م}^{٢}}{\text{ن}^{٢}}$$

وبواسطة هذه المعادلة يوجد بخصوص بسط مقدار نق

$$\left(١ + \frac{\text{وص}^{٢}}{\text{وس}^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}} = \left(\frac{\text{ن}^{٢} + \text{م}^{٢}}{\text{ن}^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}}$$

ثم نرفع كل كمية من كميتى هذا الكسر الى قوة $\frac{٣}{٢}$ والقوة $\frac{٣}{٢}$ لكمية ن² هى ن³ فنجد

$$\left(١ + \frac{\text{وص}^{٢}}{\text{وس}^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}} = \frac{(\text{ن}^{٢} + \text{م}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{\text{ن}^{٣}} \cdots\cdots\cdots (١١٠)$$

ونأخذ تفاضل معادلة (١٠٩) فيوجد

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}} = \frac{\text{ن وم} - \text{م ون}}{\text{ن}^{٢}}$$

ثم نقسم الطرف الاول لهذه المعادلة على وس والطرف الثانى على ن المكافئة الى وس فنجد

و²

سورة ثانية حول مركز ا واذا أخذ [illegible] = [illegible] ا كانت النقطة
التي تركز وقعت في [illegible] في آخر هذه السورة الثانية وتكون حينئذ [illegible]
مساوية لى [illegible] ق وبهذا [illegible] معدنية

ق = [illegible] لى ع = [illegible] ق وهو مز

(في الحلزون اللوغارتمي)

* ١٨٩ • الحلزون اللوغارتمي هو منحنى تبقى فيه زاوية ام ط
(شكل ٨١) الحادثة بين نصف قطر ام الاحتراقي وبين خط مط المماس
المنحني ثابتة ونوجد بالرمز بحرف ح فاذا زاوية ام ط

ظا ام ط = ح

وحيث انه يحدث من قيام مثلث [illegible] في ا هذا التناسب

ا : ظا ام ط :: ام : [illegible]

ظا ام ط = [illegible]

واذا عبر عن نصف القطر الاحتراقي ام برمز [illegible] و [illegible] بكمية

[illegible] الموجودة في بند (٨٣) لاجل تحت المماس المنحني القطبي نجد

ظا ام ط أو ح = [illegible] الذي يستخرج منه

[illegible] = [illegible] ... ... (١١٦)

وبأخذ تكامل هذه المعادلة على ما سبق نجد

ح لوغا ع = [illegible] + ثابتة

ويمكن جعل اساس الجملة اللوغارتمية لمهندس نيبر [illegible]
كلوغريتم لكمية هذه فجملة لوغارتمية ما [illegible] بالنسبة
لو [illegible] وتكون [illegible] ثانية لوغا ع [illegible] لوغريتم [illegible]

وبواسطة مقادير التى تعينت يعنى (١١٢) و (١١٥) تتغير معادلة (١١٢) بمعادلة

$$\text{نق} = \frac{(\text{و}\acute{}\text{ع}^{2} + \text{ع}^{2}\text{و}\acute{}^{2})^{\frac{3}{2}}}{\text{٢و}\acute{}\text{ع و}\acute{}\acute{} - \text{ع و}\acute{}\text{ع}\acute{}\text{و}\acute{}\acute{} + \text{ع}^{2}\text{و}\acute{}^{3}}$$ وهى المطلوبة

(فى المنحنيات العالية)

* ١٨٧ * تسمى بهذا الاسم المنحنيات التى تحتوى معادلاتها على كميات عالية او مكررات تفاضلية وعلى العموم جميع المنحنيات التى لا يمكن أن تبين معادلاتها بعدد محدود من الحدود الجبرية يقال لها منحنيات عالية ولنبين الشهير من هذه المنحنيات فنقول

(فى حلزونى ارشميدس أو كونون)

* ١٨٨ * اذا دار نصف قطر اب (شكل ٣٧) حول مركز ا وكانت نقطة ا تتحرك على هذا المستقيم تحركا مستقيما بحيث تأتى فى منتهاه وهو نقطة ب عند تمام دورته بعد ان كانت فى ابتداء التحرك فى مركز ا رسمت تلك النقطة فى هذا التحرك خطا منحنيا هو حلزونى ارشميدس ولكن اب = نق و قوس بد = ى و ام = ع فيوجد من بعد التعريف السابق

ام : اد :: قوس دب : بدب أو

ع : نق :: ى : ٢ط نق ومنه يستخرج

$$\text{ع} = \frac{\text{ى}}{\text{٢ط}}$$

وهذا المنحنى ليس له احداثيات مستقيمة على ما يشاهد فاذا دار اب دورة تامة كان قوس نب المحيط ويكون حينئذ ى = ٢ط نق ومن ثمة تؤول المعادلة السابقة الى

$$\text{ع} = \frac{\text{٢ط نق}}{\text{٢ط}} \quad \text{أو} \quad \text{ع} = \text{نق}$$

واذا استمرت نقطة ا فى تحركها على الانتساق رسم نصف قطر اب

القطبية المتبين فى بند (١٨٦) بهذا الرمز

$$\text{نق} = \frac{\left(\text{و}\text{ع}^{٢} + \text{ع}^{٢}\,\text{و}\text{ے}^{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{٢\,\text{و}\text{ع}^{٢}\,\text{و}\text{ے} - \text{ع}\,\text{و}^{٢}\text{ع}\,\text{و}\text{ے} + \text{ع}^{٢}\,\text{و}\text{ے}^{٣}}$$

مقادير $\text{و}\text{ع}$ و $\text{و}^{٢}\text{ع}$ المستخرجة من معادلة الحلزونى اللوغارتمى عوضا عنها ولذلك نستخرج من معادلة (١١٦)

$$\text{و}\text{ع} = \frac{\text{ع}\,\text{و}\text{ے}}{\text{ح}} \quad \text{و} \quad \text{و}^{٢}\text{ع} = \frac{\text{و}\text{ع}}{\text{ح}}\,\text{و}\text{ے} = \frac{\text{ع}\,\text{و}\text{ے}^{٣}}{\text{ح}^{٢}}$$

ثم نضع هذه المقادير فى مقدار نق فيوجد

$$\text{نق} = \frac{\left(\frac{\text{ع}^{٢}}{\text{ح}^{٢}} + \text{ع}^{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{\text{ع}^{٢}}{\text{ح}^{٢}} + \text{ع}^{٢}} = \left(\frac{\text{ع}^{٢}}{\text{ح}^{٢}} + \text{ع}^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{\frac{\text{ع}^{٢}}{\text{ح}^{٢}} + \text{ع}^{٢}}$$

واذا وضعت فى كمية الخط العمودى التى هى على ما فى بند (١٨٤)

$$\sqrt{\text{ع}^{٢} + \frac{\text{و}\text{ع}^{٢}}{\text{و}\text{ے}^{٢}}}$$

مقدار $\frac{\text{و}\text{ع}^{٢}}{\text{و}\text{ے}^{٢}}$ حدث كذلك $\sqrt{\frac{\text{ع}^{٢}}{\text{ح}^{٢}} + \text{ع}^{٢}}$ ويعلم من ذلك ان الخط العمودى يساوى فى هذا المنحنى نصف قطر الانحناء وحيث ان نصف قطر الانحنا هذا يتجه على هذا الخط العمودى على ما فى بند (١٥٥) ينتج من ذلك ان هذه الخطوط تنطبق على بعضها

* ١٩٢ * وبواسطة هذه الخاصية يثبت ان مفرود الحلزونى اللوغارتمى هو حلزونى لوغارتمى ايضا ولاجل ذلك نعتبر نقطة ق (شكل ٨٤) من الخط العمودى التى هى من نقط نصف قطر الانحناء ايضا اذ هى نهايته الحقيقية وتوجد لا محالة على المفرود ثم نرمز لابعادها القطبية برموز ےَ و عَ فيسهل تعيين هذه الابعاد بدلالة ابعاد ے و ع لنقطة م من المنحنى لانه اذا فرضنا ان ورَ يكون قوسا من الدائرة

فى هذه الجملة اللوغاريتمية (ولاثبات ذلك نقول حيث ان هـ هى أساس الجملة اللوغاريتمية المنسوبة للمهندس نيبير يوجد بالنسبة لهذا الاساس ح = هـ^(لو ع) وبأخذ لوغاريتم الطرفين بحسب الجملة اللوغاريتمية المبينة برمز لو يوجد

لو ع = لو (هـ^(لو ع)) = لوغا ع لو هـ)

واذن يكون لو ع = ح + ثانية

* ١٩٠ * ويمكن رسم الحلزونى اللوغاريتمى بالنقط بالكيفية الآتية وهى أن تقسم محيط و وَ وً (شكل ٨٣) الى اقسام متساوية ثم توصل انصاف أقطار الى نقط التقسيم ويقطع عليها اجزاء ام وامَ وامً وامٌ .. الخ التى تكون مكونة متوالية هندسية فنقط م و مَ و مً و مٌ .... الخ تركب حلزونيا لوغاريتميا واثبات ذلك أن يفرض ان اجزاء م مَ و مَ مً و مً مٌ .. الخ تكون صغيرة الامتداد بحيث يمكن اعتبارها كخطوط مستقيمة فمثلثات امَ مً و امً مٌ و ...... الخ تكون بهذا الاعتبار متشابهة لان الزوايا التى فى ا كلها متساوية بالعمل وزوايا م مَ ا و مَ مً ا و مً مٌ ا .... الخ كلها متساوية ايضا من الخاصية الاصلية للمنحنى ومن اجل ذلك توجد هذه التناسبات

ام : امَ :: امَ : امً

امَ : امً :: امً : امٌ

الخ و الخ و الخ و الخ

وذلك يدل على ان راسيات ام و امَ و امً .... الخ توجد فى الحلزونى على متوالية هندسية

* ١٩١ * الخط العمودى فى الحلزونى اللوغاريتمى يساوى نصف قطر الانحنا أبدا وللبرهنة على ذلك نضع فى مقدار نصف قطر الانحنا فى المنحنيات

القطبية

وأخذت ثابتة ح باشارة ناقص لانه يوجد عندنا

$$-\frac{ء ع}{ع^{2}} = \frac{ء ی}{ح}$$

التي هي معادلة يحدث منها من بعد أخذ تكاملها على ما سبق

$$\frac{1}{ع} = \frac{ی}{ح} + ث$$

وتؤول هذه المعادلة بتعيير كمية ث غير متعينة بكمية أخرى ح ث غير متعينة الى

$$\frac{1}{ع} = \frac{ی}{ح} + \frac{ث}{ح}$$

واذا أخذت النقطة الاصلية و الابتدائية للافق ی بحيث يكون أفق ی + ث مساويا لافق جديد ی كانت المعادلة السابقة هي

$$\frac{1}{ع} = \frac{ی}{ح} \quad \text{أو وهو الاولى}$$

$$ع = \frac{ح}{ی} \quad \cdots\cdots (۱)$$

ويتبين من هذه المعادلة انه يوجد ع = ∞ متى يكون ی = ۰

وينتج من ذلك ان نصف قطر الاحتراق الموافق للنقطة التي يكون فيها ی = ۰ هو خط مقارب منحنى

* ۱۹٤ * معادلة (۱۱۷) تبين بها ان نصف قطر الاحتراق يناسب الافق عكسا ... جعلنا ... ی = ... و ... نجد بخصوص ع ... [illegible] ... و ...

ويعلم من ذلك ان نصف قطر الاحتراق يؤول الى نصف ما كان في الدورة الاولى عند تمام دورتين ويؤول الى ثلث ما كان عند تمام ثلاث دورات وهلم جرا نظرا لعدة الدورات التي يدورها حول النقطة القطبية

* ۱۹٥ * معادلة الحلزون اللوغارتمي هي ومعادلة حلزون ارشميدس ليست الا حالات خصوصية من معادلة ع = ح ی^[illegible] لانه

مرسومة بنصف قطر مساو للواحد كانت آفاق نقطتي م و ن مختلفة عن بعضها بهذا القوس بسبب قيام زاوية م ا ن يكون ذلك القوس مساويا الى ربع المحيط ولعدم الخلاف في المستعملات نبين برمز $\frac{ط}{٢}$ ربع المحيط المرسوم بنصف قطر يساوي الاحد فنجد ـَ = ـ + $\frac{ط}{٢}$ وبأخذ تفاضل هذه المعادلة يوجد

$$و ا ـ = و ا ـَ$$

وغير ذلك حيث ان بعد عَ القطبي لنقطة ن من المفروض يساوي تحت العمودي $\frac{و ا عَ}{و ا ـَ}$ للحلزوني اللوغاريتمي نغير $\frac{و ا ع}{و ا ـ}$ بكمية عَ

في معادلة هذا المنحني فنجد ع = حـ عَ وعلى ذلك يكون و ا ع = حـ و ا عَ فبوضع مقادير و ا ـ و و ا ع و ع هذه في معادلة (١١٦) للحلزوني اللوغاريتمي نجد

$$حـ \frac{و ا عَ}{عَ} = و ا ـَ$$

وهذه المعادلة متحدة الشكل مع المعادلة السابقة فبها يفهم أن مفروض الحلزوني اللوغاريتمي هو حلزوني آخر لوغاريتمي وهذا ماأردنا بيانه

(في الحلزوني الزائدي والحلزونيات الكامنة في معادلة ع = حـ ـ ن)

١٩٣ الخاصية التي تميز بها الحلزوني الزائدي هي ثبوت أو عدم تغير تحت المماس فيه فاذا رمزنا لتحت المماس هذا برمز حـ وساويناه بمقدار تحت المماس للخط القطبي وهو المتبين في بند (١٨٣) كانت معادلة هذا المنحني يعني الحلزوني الزائدي هكذا

$$ع^٢ \frac{و ا ـ}{و ا ع} = ـ حـ$$

واخذت

* ١٩٩ * الخاصية الشهيرة لهذا المنحنى هى ثبوت اعنى عدم تغير تحت المماس فيه لانه يوجد بأخذ تفاضل معادلة اللوغاريتمى

$$\frac{و\ ص}{و\ س} = \frac{س}{ح} \text{ لوغا } ح$$

ويستخرج من ذلك

$$\frac{س\ و\ س}{ح\ و\ ص} = \frac{1}{\text{لوغا ح}}$$ أو

$$\frac{ص\ و\ س}{و\ ص} = \frac{1}{\text{لوغا ح}}$$

وحيث ان الطرف الاول لهذه المعادلة يبين تحت المماس للمنحنى كما فى بند (٦٩) فهو ثابت لمساواته كمية $\frac{1}{\text{لوغا ح}}$ الثابتة وهو المراد بيانه

(فى السكلويد)

* ٢٠٠ * السكلويد منحنى يرتسم بنقطة م (شكل ٣٩) الكائنة على محيط الدائرة المتدحرجة على مستقيم ىح ومن المحقق ان جميع نقط قوس ىم تنطبق على التعاقب على مستقيم ىا فتنطبق نقطة م فى نوبتها على ا فى هذا التحرك الآخذ من ى نحو ح ويكون قوس ىم مساويا لمستقيم ىا

وحيث كانت جميع النقط التى تمر عليها م فى هذا التدحرج توجد على السكلويد فرضا فنقطة ا تكون كذلك على هذا المنحنى فنأخذها مبدأ للآفاق او نقطة أصلية وننزل عمود مه على قطر سى ونجعل اع = س و ع م = ص و سى = ٢ح وقوس مى = ز و مه = ع فنجد

اع = اى — عى أو

س = قوس مى — مه أو

س = ز — ع .... (١١٨)

ونبحث اولا عن حذف قوس ز بالكيفية الآتية وهى أن نأخذ تفاضل

بجعل $\text{ن} = 1$ و $\text{ح} = \frac{1}{\text{ط}^{2}}$ تحدث المعادلة الثانية و بجعل
$\text{ن} = -1$ تحدث الاولى ومن الحلزونيات التى تتبين بهذه المعادلة الحلزونى
المكافى وهو الموافق الى فرض $\text{ن} = 2$

(فى اللوغاريتمى)

* ١٩٦ * اللوغاريتمى منحن باحداثيات مستقيمة وفيه الافقى
لوغاريتم رأسيه واذن تكون معادلة هذا المنحنى بهذه الصورة

$$\text{س} = \text{لوغا ص}$$ ومنها يستخرج

$$\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}}$$ ثم يوجد بواسطة التفاضل

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ح}^{\text{س}}\ \text{لوغا ح}$$

* ١٩٧ * للبحث عن بعض خواص هذا المنحنى نجعل $\text{س} = 0$
فنجد $\text{ص} = 1$ واذا أعطينا بعد ذلك مقادير متزائدة وموجبة
الى متغير س أخذ متغير ص فى الازدياد واذا أخذ متغير س
مقدارا سالبا $-\text{ع}$ يوجد $\text{ص} = \text{ح}^{-\text{ع}} = \frac{1}{\text{ح}^{\text{ع}}}$ ويرى
ان الرأسى يتناقص كلما بعد عن النقطة الاصلية فى جهة الآفاق السالبة
وان المنحنى لا يقابل محور الآفاق الاعلى بعد غير محدود فى الحالة التى تصير
فيها معادلة $\text{ص} = \frac{1}{\text{ح}^{\text{ع}}}$ آيلة الى

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{ح}^{\infty}} = 0$$ وينتج من ذلك ان امتداد محور الآفاق
خط مقربى للمنحنى

* ١٩٨ * اذا أخذت من ابتداء النقطة الاصلية الآفاق المتساوية
(شكل ٣٨) $\text{اح} = \text{ع}$ و $\text{اح}' = -\text{ع}$ يوجد

$\text{حم} = \text{ح}^{\text{ع}}$ و $\text{ح}'\text{م}' = \frac{1}{\text{ح}^{\text{ع}}}$ واذن يكون

$$\text{حم} \times \text{ح}'\text{م}' = 1$$

(١٢٣)

ثم [illegible] (٢٠) [illegible]

وباختصار هذه يوجد

[illegible] وهي معادلة [illegible]

٢٠١ * [illegible] بالكيفية الآتية وهي ان تستخرج من معادلة [illegible]

ر = قوس (جا = [illegible])

ثم تضع في هذه المعادلة عوضاً عن [illegible] مقدارها المستخرج من معادلة (١٢٢) فنجد

ر = قوس (جا = [illegible])

[illegible]

[illegible] = قوس [illegible]

[illegible]

القطرفي [illegible]

واذا أريد ادخال هذه [illegible] يجب وضع

[illegible] قوس [illegible]

٢٠٢ * [illegible]

[illegible]

المعادلة السابقة فيوجد

$$و س = و ر - و ع \quad \text{......} \quad (١١٩)$$

ولايجاد مقدار و ر بدلالة ع نراعى انه يوجد بين ع و ز هذا التعادل

$$ع = جا ز$$

وباخذ تفاضل هذه المعادلة على ما فى بند (٤٢) يوجد

$$و ع = و ز \frac{جتا ز}{د}$$ ومنه يستخرج

$$و ز = \frac{د و ع}{جتا ز}$$

ويلزم تغيير مقدار جتا ز فى هذه المعادلة بالمقدار الذى يحدث من معادلة

جا^٢ ز + جتا^٢ ز = د^٢ أو وهو الاولى

$$ع^٢ + جتا^٢ ز = د^٢$$

ويحدث بذلك

$$و ز = \frac{د و ع}{\sqrt{د^٢ - ع^٢}}$$

وبوضع هذا المقدار فى معادلة (١١٩) يكون

$$و س = \frac{د و ع}{\sqrt{د^٢ - ع^٢}} - و ع \quad \text{.....} \quad (١٢٠)$$

ولم يبق الا بيان ع بدلالة ص ولاجل ذلك نفرض ان و يكون مركز الدائرة الراسمة س م ر (شكل ٣٩) فنجد

$$و هـ = \sqrt{م و^٢ - م هـ^٢} \text{ أو}$$

$$د - ص = \sqrt{د^٢ - ع^٢} \quad \text{........} \quad (١٢١)$$

وبتربيع هذه المعادلة واختصارها يستخرج منها

$$ع = \sqrt{٢ د ص - ص^٢} \quad \text{..............} \quad (١٢٢)$$

وباخذ

العمودى = $ص \sqrt{\frac{و ص^٢}{و س^٢} + ١}$

فاذا وضعنا فى هذا القانون مقدار $\frac{و ص}{و س}$ المستخرج من معادلة السكلويد نجد

العمودى = $ص \sqrt{\frac{٢ ح ص - ص^٢}{ص^٢} + ١} = \sqrt{٢ ح ص}$

ولاجل رسم هذا المقدار نوصل وتر م ى (شكل ٤٣) فنجد

ى هـ : م ى :: م ى : ى ب أو

ص : م ى :: م ى : ٢ ح ومنها يحدث

وتر م ى = $\sqrt{٢ ح ص}$

وحيث ان زاوية ب م ى قائمة من خاصية الدائرة فوتر م ب يكون عمودا على الخط العمودى م ى فى طرفه ويعلم من ذلك ان وتر م ب المذكور يمس السكلويد فى نقطة م لان الخط المماس والخط العمودى يشكلان بينهما زاوية قائمة ابدا

واذن يمكن امتداد الخط المماس للسكلويد فى نقطة م برسم نصف الدائرة الراسمة م ب ى ومد وتر ب م ولعدم تشكيل هذه الدائرة لازمة فى كل نقطة من المنحنى يكفى رسم نصف الدائرة راسمة على اكبر راسيات وهو ب ى (شكل ٤٤) ومد خط م هـ من النقطة المفروضة م عمودا على ب ى ووصل وتر ب ح فخط م ط المرسوم من نقطة م موازيا لهذا الوتر يكون هو المماس المطلوب وذلك لما تقدم من سبق

* ٢٠٤ * لمعرفة مقدار نصف قطر الانحناء للسكلويد يلزم أن تستخرج مقادير $\frac{و ص}{و س}$ و $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ من معادلة هذا المنحنى ثم توضع تلك المقادير فى كمية نصف قطر الانحنا التى هى

تؤول كمية قوس (جا $= \sqrt{٢ د ص - ص^٢}$) الى قوس (جا $= \sqrt{- ٢ د ص - ص^٢}$) وهى كمية تخيلية وثانيا اذا جعل ص $=$ ٢ د $+$ ل آلت كمية قوس (جا $= \sqrt{٢ د ص - ص^٢}$) الى قوس (جا $= \sqrt{- ٢ د ل - ل^٢}$) وهو مقدار تخيلى ايضا فاذن يكون المنحنى محصورا بين متوازيى د ا ، بَدَ ا (شكل ٤٠) موازيا الى د د على بعد هـ ف $=$ ٢ د عن محور الآفاق

واكبر مقدار يكون لمتغير ص هو ٢ د لانه اذا دحرجت الدائرة الراسمة من ا نحو د (شكل ٤١) أخذت نقطة م التى كانت اولا فى ا فى الارتفاع على الولا الى ان تصير فى ب التى هى طرف قطر ب د فيكون عند ذلك افق اد مساويا الى د هـ ب يعنى نصف محيط الدائرة الراسمة

وهذا الناتج يطابق مايحدث من معادلة (١٢٤) حيث انه بجعل ص $=$ ٢ د فيها يوجد س $=$ قوس (جا $=$ ٠) والقوس الذى جيبه صفر هو احد هذه القسى ٠ د هـ ب و ٢ د هـ ب و ٣ د هـ ب والخ ويرى ان القوس فى هذه الحالة هو د هـ ب

ويعلم من ذلك انه حين تأتى نقطة م فى ب تكون قد رسمت قوس ا ب من السكاويد فاذا استمرت هذه النقطة فى تحركها رسمت قوسا آخر ب د مشابها للاول وبالجملة متى استمرت الدائرة الراسمة فى تدحرجها على محور الآفاق حدثت نقطة م قسيا من السكاويد لا حصر لعددها وهى د بَ دَ و دَ بً دً .... الخ انظر (شكل ٤٢) ويمكن أن تتحرك الدائرة الراسمة فى جهة ا نحو اً وتحدث نقطة م حينئذ اقواسا غير محصورة العدد ا بَ اَ و اَ بً اً .... الخ

وجملة الاقواس الموجودة فى الجهة المرادة هى المركبة للسكاويد

* ٢٠٢ * الخط العمودى فى النقطة التى أبعادها س و ص (شكل ٤٣) متعين على ما فى بند (٧٠) بهذا القانون

العمودى

وبجعل صـ = ...

[illegible]

ويلزم من ذلك ... (شكل ٤٥) ...

ضعف الخط العمودي ...

* ٢٠٥ * ونشرح معادلة المرود بوضع مقادير

وَصـ / وَسـ و وَصـ / وَسـ في قوانين بند (١٤٩) فتأتي

صـ − و = − (وَصـ / وَسـ) ...

سـ − ر = ... = − (صـ − و) وَسـ / وَصـ

فيوجد

صـ − و = ...

سـ − ر = ...

ومن يكون

و = − صـ و ر = ...

أو (شكل ٤٦)

...

$$ق = - \frac{\left(١ + \frac{وَ صـ^٢}{وَ سـ^٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{وَ^٢ صـ}{وَ سـ^٢}} \quad \text{على مافى بند (١٥٠)}$$

المأخوذة بإشارة سالبة لانا نعلم ان هذا المنحنى يتقعر نحو محور الاً فاق هذا ويحدث اولا من معادلة السكلوئيد

$$\frac{وَ صـ}{وَ سـ} = \frac{\sqrt{٢ ح صـ - صـ^٢}}{صـ} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (١٢٥)$$

ولايجاد $\frac{وَ^٢ صـ}{وَ سـ^٢}$ نجعل $\frac{وَ صـ}{وَ سـ} = ع$ فنجد ايضا

$$ع = \frac{\sqrt{٢ ح صـ - صـ^٢}}{صـ} = \sqrt{\frac{٢ ح}{صـ} - ١}$$

وبأخذ التفاضل على مافى بند (٢٣) يوجد

$$وَ ع = - \frac{\frac{ح}{صـ^٢} وَ صـ}{\sqrt{\frac{٢ ح}{صـ} - ١}} = - \frac{ح وَ صـ}{صـ \sqrt{٢ ح صـ - صـ^٢}}$$

واذن يكون

$$\frac{وَ ع}{وَ صـ} = - \frac{ح}{صـ \sqrt{٢ ح صـ - صـ^٢}}$$

ثم نضرب بهذه المعادلة فى معادلة (١٢٥) فنجد على مافى بند (٢٤)

$$\frac{وَ ع}{وَ سـ} = - \frac{ح}{صـ^٢} \quad \text{أو} \quad \frac{وَ^٢ صـ}{وَ سـ^٢} = - \frac{ح}{صـ^٢}$$

وبواسطة هذه المقادير تؤول كمية نصف قطر الانحناء الى

$$ق = \frac{\left(\frac{٢ ح}{صـ}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{ح}{صـ^٢}} = \frac{(٢ ح)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{ح صـ^{\frac{٣}{٢}}}{صـ^٢}} = \frac{٢^{\frac{٣}{٢}} ح^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{صـ^{\frac{١}{٢}}}}$$

وبجعل

$$طح - رَ = قوس مَ ر + \sqrt{٢ حوَ - وَ^٢}$$ أو

$$طح - رَ = قوس رمَ ل - قوس مَ ل + \sqrt{٢ حوَ - وَ^٢}$$

$$= طح - قوس مَ ل + \sqrt{٢ حوَ - وَ^٢}$$

وعلى ذلك يكون

$$رَ = قوس مَ ل - \sqrt{٢ حوَ - وَ^٢}$$

وهذه المعادلة هى معادلة سكلويد فيعلم من ذلك ان مفروض السكلويد سكلويد نم

* ٢٠٦ * ويمكن الاثبات بالوجه الآتى على ان المفروض اا َ (شكل ٤٦) سكلويد ولذلك نقول عندنا

$$قوس لمَ + قوس رمَ = طح$$ فيكون

$$قوس لمَ = طح - قوس رمَ$$

وغير ذلك

$$قوس رمَ = قوس مر = ار$$ كما فى بند (٩٩)

فاذا وضعنا هذا المقدار فى المعادلة السابقة حدث

$$قوس لمَ = طح - ار = اد - ار$$ أو

$$قوس لمَ = لاَ$$

وهذه هى خاصية السكلويد

(فى تغيير المتغير غير المعلق)

* ٢٠٧ * متى يفرض قانون مشتملا على مكررت تفاضلية فلا يمكن حذف تلك المكررات الا بمساعدة معادلة المنحنى سكر ... تطبيق هذا القانون عليه ومثاله أن يطلب ما يؤول اليه قانون

$$\frac{\left(1 + \frac{و^٢ ص}{و س^٢}\right) و ص}{\frac{و ص}{و س^٢} و س}$$

وبمراعاة كون اح + مه = ار = قوس مر يمكن وضع المعادلة الاخيرة هكذا

ر = قوس مر + مه ..... (١٢٦)

واذا مددنا ـ ر وأخذنا رل = ـ ر = ٢ح ورسمنا نصف محيط رمَل على رل مر هذا النصف محيط بنقطة مَ بسبب تساوى وترى مَر و مر ويوجد اذ ذاك

قوس مر = قوس مَر و مه = مَهَ

فنضع هذه المقادير فى معادلة (١٢٦) فيوجد

ر = قوس مَر + مَهَ واذن يكون

ر = قوس مَر + $\sqrt{}$ ٢حو ـ و٢ ...... (١٢٧)

وهذه هى المعادلة التى توجد بين ابعاد اك = ر و كمَ = و لنقطة ما مَ من المفروض فنطوّل الآن الرأسى حد = ٢ح (شكل ٤٦) بكمية دا َ مساوية ايضا الى ٢ح ونرسم من نقطة ا َ خط ا َكَ موازيا لخط اد ونحوّل النقطة الاصلية ا فى ا َ وليكن لاجل ذلك ا َكَ = رَ و كَمَ = وَ فنجد لاجل الافقى ا َكَ = اد ـ اك أو

رَ = ١/٢ المحيط الراسم ـ اك أو

رَ = طح ـ ر

وبالنظر الى الرأسى وَ يوجد

مَكَ = ا َد ـ كمَ أو

وَ = ٢ح ـ و

ويستخرج من هذه المعادلات

ر = طح ـ رَ و و = ٢ح ـ وَ

وبواسطة هذه المقادير تؤول معادلة (١٢٧) الى

طح

* ٢٠٩ * [illegible] سبب [illegible] مضروب

[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] جميع [illegible] [illegible]

على [illegible] مضروبا [illegible]

[illegible] الحدود التي كانت متبوعة بكمية [illegible] بخلاف

[illegible] التي كانت متبوعة بكمية [illegible]

[illegible] لان حاصل ضرب [illegible] في [illegible]

ومتى يؤخذ تفاضل معادلة [illegible] بعد [illegible]

[illegible] = [illegible] = [illegible]

في [illegible] على [illegible]

[illegible] بحصول ضرب [illegible]

* ٢١٠ * [illegible]

[illegible] يمكن [illegible] على [illegible]

[illegible] علامن ذلك ويبنى عليه [illegible]

[illegible] لازم يمكن [illegible] تفاضلات [illegible]

* ٢١١ * ولا [illegible]

[illegible] [illegible]

... ... فانه يلزم أن يستخرج من معادلة القطع المكافئ

ن ث $\text{صـ} = \text{ن سـ}$ مقادير $\frac{\text{و صـ}}{\text{و سـ}}$ و $\frac{\text{و}^{2}\text{صـ}}{\text{و سـ}^{2}}$ ثم توضع هذه المقادير

في ... لتحذف المكررات التفاضلية حينئذ و اذا نظرت كميات

$\frac{\text{و صـ}}{\text{و سـ}}$ و $\frac{\text{و}^{2}\text{صـ}}{\text{و سـ}^{2}}$ مجهولة يلزم غالبا معادلتان لحذفها من اى

قانون كان وتدرك هاتان المعادلتان باخذ تفاضل معادلة المنحنى مرتين

على التوالى

* ٢٠٨ * متى زال و سـ بواسطة العمليات الجبرية من أن تكون

موجودة تحت و صـ كما فى القانون الآتى

$$\frac{\text{صـ}(\text{و سـ}^{2} + \text{و صـ}^{2})}{\text{و سـ}^{2} + \text{و صـ}^{2} - \text{صـ و}^{2}\text{صـ}} \cdots\cdots\cdots \quad (٢١)$$

فالوضع ينعدل بنظر كميات و سـ و و صـ و $\text{و}^{2}\text{صـ}$ كمجهولة

وحيث انه يلزم لحذفها على العموم معادلات عدتها كعدتها فلا يتراءى اولا ان

الحذف ممكن حيث كان تفاضل معادلة المنحنى لا يحدث الا معادلتين بين

و سـ و و صـ و $\text{و}^{2}\text{صـ}$ لكن يلزم التأمل انه حين تحذف و صـ و $\text{و}^{2}\text{صـ}$

بواسطة هاتين المعادلتين يوجد فى القانون مضروب مشترك و سـ^{2} ينحذف

و يسقط فاذا كان المنحنى قطعا مكافئا معادلته $\text{صـ} = \text{ع سـ}^{2}$ مثلا فانه

باخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين بالتوالى يوجد

$$\text{و صـ} = ٢\,\text{ع سـ و سـ} \quad \text{و} \quad \text{و}^{2}\text{صـ} = ٢\,\text{ع و سـ}^{2}$$

وبوضع هذه المقادير فى قانون (١٢٨) يوجد بعد اسقاط المضروب

المشترك و سـ^{2}

$$\frac{\text{صـ}(١ + ٤\,\text{ع}^{2}\text{سـ}^{2})}{١ + ٤\,\text{ع}^{2}\text{سـ}^{2} - ٢\,\text{ع صـ}}$$

صـ = ح (ب^٢ – هـ^٣)^٢ / ب^٢ هـ^٤ التى اذا وفقت مع سـ = ب^٢ / هـ

حدثت بواسطة حذف صـ = ح (سـ – هـ) / ب^٢ وهو الشرط الواجب

مراعاته فى تخب متغير ى

* ٢١٢ * واذن يمكن تعيين متغير ى غير معلق بالاختيار فيؤخذ له وتر او قوس او افق او رأسى مثلا فاذا بين ى

قوسا من المنحنى يجب ان يوجد و ى = √(و سـ^٢ + و صـ^٢)

واذا كان ى تبين وترا وكانت النقطة الاصلية رأس المنحنى

يكون ى = √(سـ^٢ + صـ^٢) واخيرا يمكن ان تكون ى الافق

او الرأسى ويوجد عند ذلك ى = سـ او ى = صـ

* ٢١٣ * قد يكون انتخاب أحد هذه الفروضات او غيرها ضروريا لاجل أن يكون القانون المشتمل على التفاضلات عاريا عنها اى عن هذه التفاضلات والغالب انه اذا لم يفعل هذا الانتخاب يفرض تقديرا ان المتغير غير المعلق كان متعينا ومثاله ان الفرضية فى الحالة المعتادة التى لا يحتوى القانون فيها الا على تفاضلات و سـ و و صـ و و^٢ صـ و و^٣ صـ و الخ هى ان متغير ى غير المعلق كان مأخوذا لاجل الافق لانه ينتج من ذلك حينئذ

$$ى = سـ \quad و \quad \frac{و سـ}{و ى} = ١ ، \quad \frac{و^٢ سـ}{و ى^٢} = ٠ ، \quad \frac{و^٣ سـ}{و ى^٣} = ٠ \quad الخ$$

ويرى ان القانون لا يشتمل على التفاضلات الثانية والثالثة و الخ

للكمية سـ

* ٢١٤ * ولتدبير القانون فى عمومه يلزم من بعد ما سبق ان تكون سـ و صـ دوال لمتغير ثالث غير معلق ى ويوجد على موجب بند (٢٤)

$$\frac{و صـ}{و ى} = \frac{و صـ}{و سـ} \cdot \frac{و سـ}{و ى}$$

لانه اذ فرضنا مثلا انه يكون داخلا فى هذا القانون التفاضلات ق س . ق ص و ق² س و ق² ص واخذنا تفاضل المعادلة المتبينة برمز ص = د س مرتين على التوالى حدث منهما تان المعادلتان

ق(ق³ ص ق س − ق س ق ص) = ٠ و ق(ق س ق ص ق س ق ص ق² س ق² س)

ولا يمكن بهاتين المعادلتين الا حذف اثنين من التفاضلات ق ص و ق² س و ق² ص الثلاث ويشاهد عدم امكان حذف جميع التفاضلات الداخلة فى القانون المفروض ويوجد اذن فى هذه الحالة شرط مقدر متبين بالتفاضل ق² س وهذا الشرط هو أن متغير س معتبر بنفسه كدالة لمتغير ثالث لا يظهر فى القانون ويسمى بالمتغير غير المعلق ويصير ذلك فى غاية الوضوح اذا لوحظ كون معادلة ص = د س يمكن اشتقاقها من جملة معادلتى

س = ق ب و ص = د ب

اللازم حذف ب من بينهما ولذا تؤول معادلة ص = ح (س − هـ)² / ب² الى جملة معادلتى

س = ب + هـ و ص = ح ب²

ويدرك ان س و ص يجب أن يتغيرا على مقتضى الزيادة التى يمكن ان تأخذها كمية ب ولكن هذه الفرضية يعنى كون س و ص يتغيران من بعد الزيادة المفروضة لمتغير ب تقتضى وقوع معادلات بين س و ب وبين ص و ب واحدى هذه المعادلات تكون بالاختيار لانه اذا فرض ان المعادلة التى نرمز لها على العموم برمز ص = د س تكون ص = ح (س − هـ)² / ب² مثلا ونظمت بين ب و س معادلة س = ب³ / هـ² الحيث ما اتفقت ووضع هذا المقدار فى معادلة ص = هـ (س − هـ)² / ب² غيرها الى معادلة

صيم

[illegible]

[illegible]

$$ق = \frac{(\ldots)^{[illegible]}}{[illegible]}$$

[illegible] بمعرفة مقدار ق في الخانة [illegible]

[illegible]

$$ق = \frac{(\ldots + \ldots)^{٢}}{[illegible]}$$

[illegible]

$$ق = [illegible] \quad \ldots\ldots \quad (٣٠)$$

* ٢١٦ [illegible]

[illegible]

ان وجد [illegible]

[illegible]

ويستخرج من هذه المعادلة

$$\frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}} = \frac{\frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{ے}}}{\frac{\text{و}\,\text{س}}{\text{و}\,\text{ے}}} \cdots\cdots (١٢٩)$$

ثم ناخذ التفاضل الثانى الى ص ونفعل بالطرف الثانى كما فعل بالكسور فى بند (١٩) فيوجد

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}} = \frac{\frac{\text{و}\,\text{س}}{\text{و}\,\text{ے}}\cdot\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\,\text{ے}} - \frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{ے}}\cdot\frac{\text{و}^{٢}\text{س}}{\text{و}\,\text{ے}}}{\frac{\text{و}\,\text{س}^{٢}}{\text{و}\,\text{ے}^{٢}}}$$

ولرمز وے فى هذه الكمية استعمالان احدهما بيان ما يكون المتغير غير المعلق ے والآخر دخوله فى الكمية المذكورة كعلامة جبر (والمراد بعلامة الجبر هنا كمية جبرية) ويمكن أن لانعتبر وے الا بالمعنى الثانى مادامت ے هى المتغير غير المعلق هذا والكمية السابقة تختصر باسقاط المضروب المشترك $\text{و}\,\text{ے}^{٢}$ بكاتبها هكذا

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}} = \frac{\text{و}\,\text{س}\,\text{و}^{٢}\text{ص} - \text{و}\,\text{ص}\,\text{و}^{٢}\text{س}}{\text{و}\,\text{س}^{٢}}$$

واذا قسمنا على وس صارت

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{٢}} = \frac{\text{و}\,\text{س}\,\text{و}^{٢}\text{ص} - \text{و}\,\text{ص}\,\text{و}^{٢}\text{س}}{\text{و}\,\text{س}^{٣}}$$

* ٢١٥ * وبالعمل هكذا على معادلة (١٢٩) يرى انه باخذ ے متغيرا غير معلق يصير الطرف الثانى للمعادلة مطابقا للاول (ومعنى مطابق للاول عينه حقا بحتا) ويعلم من ذلك انه متى تؤخذ ے للمتغير غير المعلق

لا يكون

واذا أخذنا تفاضل هذه المعادلة واعتبرنا وى ثابتة على ما في بند (٢٨) حيث كانت ى هي المتغير غير المعلق واجرينا العمل كما في قاعدة الاسس وجدنا

$$\frac{\text{٢ وس و}^{٢}\text{س}}{\text{وى}^{٢}} + \frac{\text{٢ وص و}^{٢}\text{ص}}{\text{وى}^{٢}} = ٠$$

ومنه يستخرج

$$\text{وس و}^{٢}\text{س} = - \text{وص و}^{٢}\text{ص}$$

واذا وضعنا حينئذ مقدار $\text{و}^{٢}\text{س}$ او مقدار $\text{و}^{٢}\text{ص}$ المستخرج من هذه المعادلة في معادلة (١٣٠) يوجد في الحالة الاولى

$$\text{نق} = \frac{(\text{وس}^{٢} + \text{وص}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{(\text{وس}^{٢} + \text{وص}^{٢})\,\text{و}^{٢}\text{ص}}\,\text{وس} = \frac{\sqrt{\text{وس}^{٢} + \text{وص}^{٢}}}{\text{و}^{٢}\text{ص}}\,\text{وس}$$

وفي الحالة الثانية

$$\text{نق} = - \frac{(\text{وس}^{٢} + \text{وص}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{(\text{وس}^{٢} + \text{وص}^{٢})\,\text{و}^{٢}\text{س}}\,\text{وص} = - \frac{\sqrt{\text{وس}^{٢} + \text{وص}^{٢}}}{\text{و}^{٢}\text{س}}\,\text{وص}$$

* ٢٢٠ * لم نعتبر فيما سبق الا المكررين التفاضليين $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ و $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ ولكن اذا كان القانون يحتوي على مكررات تفاضلية $\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}$ و $\frac{\text{و}^{٤}\text{ص}}{\text{وس}^{٤}}$ .... الخ يترتب عليها تعيين مقادير التي تنسب للحالة التي يكون فيها س و ص دوال لمتغير ثالث غير معلق بكيفيات مشابهة للتي استعملت

(في طريقة الصغيرات جدا)

فى الحالة الاعتيادية الى

$$\text{نق} = \frac{(\text{و}\text{س}^{2}+\text{و}\text{ص}^{2})^{\frac{3}{2}}}{\text{و}\text{س}\,\text{و}^{2}\text{ص}} = \frac{\left(1+\frac{\text{و}\text{ص}^{2}}{\text{و}\text{س}^{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{2}}}$$

* ٢١٧ * ولكن اذا كان يراد أن يكون الرأسى ص يبين المتغير غير المعلق عوضا عن أخذ س لذلك المتغير ننظر أن هذا الشرط يكون متبينا بمعادلة ص = ى و باخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين يوجد

$$\frac{\text{و}\text{ص}}{\text{و}\text{ى}} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{و}\text{ى}^{2}} = 0$$

وتبين المعادلة الاولى من هاتين المعادلتين ان ص هو المتغير غير المعلق وهذا لا يغير القانون ولكن الثانية تبين ان $\text{و}^{2}\text{ص}$ يجب أن يكون صفرا وتؤول معادلة (١٣٠) حينئذ الى

$$\text{نق} = -\frac{(\text{و}\text{س}^{2}+\text{و}\text{ص}^{2})^{\frac{3}{2}}}{\text{و}\text{ص}\,\text{و}^{2}\text{س}}$$

* ٢١٨ * وليتنبه انه متى تكون س مبينة للمتغير غير المعلق ووجد بناء على ذلك $\text{و}^{2}\text{س} = 0$ استدل بهذه المعادلة على ان وس ثابتة وينتج من ذلك عموما أن تفاضل المتغير المنظور متغيرا غير معلق كمية ثابتة

* ٢١٩ * واخيرا اذا أخذ القوس للدلالة على المتغير غير المعلق يوجد

$$\text{و}\text{ى} = \sqrt{\text{و}\text{س}^{2}+\text{و}\text{ص}^{2}}$$

وبتربيع الطرفين وقسمتهما بعد ذلك على $\text{و}\text{ى}^{2}$ يوجد

$$\frac{\text{و}\text{س}^{2}}{\text{و}\text{ى}^{2}} + \frac{\text{و}\text{ص}^{2}}{\text{و}\text{ى}^{2}} = 1$$

واذا

زدت ع نقص الكسر واذن يصير هذا الكسر على الاطلاق صفرا متى تصير ع غير متناهية ولذا يستطاع النظر الى ب التى تكون غير متناهية بالنظر الى ح

* ٢٢٥ * الكميتان الصغيرتان جدا لا تكون نسبتهما صفرا لانه يوجد

$$\frac{ح}{\infty} : \frac{ب}{\infty} :: ح : ب$$

وزيادة على ذلك يعرف ان الكميتين الصغيرتين جدا يمكن اعتبارهما كالكميتين الكبيرتين جدا ولذا لا تكون النسبة $\frac{قُص}{قُس}$ للكميتين الصغيرتين جدا المرموز لهما برموز قُس و قُص صفرا وهذا ما يطابق ما وجدناه باعتبار النهايات

* ٢٢٦ * متى تكون كمية س صغيرة جدا بالنسبة الى مقدار رمزه ح فالمربع س٢ يكون صغيرا جدا بالنسبة الى س لانه يستدل بتناسب

$$١ : س :: س : س^٢$$

ان س٢ تدخل فى س مرارا عدتها كعدة دخول س فى الواحد يعنى عدد مرار غير متناه

ويثبت كذلك بواسطة تناسب س : س٢ :: س٢ : س٣ انه متى كان س٢ صغيرا جدا بالنسبة الى س كان بالاحرى س٣ صغيرا جدا بالنسبة الى س٢ ولذلك انقسمت الصغيرات جدا الى درجات ومراتب مختلفة فكمية س فى الامثلة السابقة هى صغيرة جدا بدرجة اولى و س٢ صغيرة جدا بدرجة ثانية و س٣ صغيرة جدا بدرجة ثالثة وهكذا

* ٢٢٧ * ويستدل انه متى كانت س صغيرة جدا بالنسبة الى ح كانت كذلك س مضروبة فى كمية محدودة ب وثبات ذلك ان تكون حيث ان كمية س يمكن اعتبارها

* ... ... اعرف ... واعتباره يؤول الى تقرير هذه القضية ... ثبات ... لا تكون غير منتهية او غير محدودة ولذا يجب ... من كمية س + ح اذا اعتبرت س غير منتهية والا ... س الزيادة ... وهذا يخالف تقريرنا

* ٢٢٢ * ... هذه القضية هي الاساس لزم أن نثبتها ... ثبات كاف فنقول

... معادلة

$$\frac{1}{ح} + \frac{1}{حس} = م \cdots\cdots (١٣١)$$

فبضرب هذه المعادلة في حس يحدث

$$س + ح = م ح س \cdots\cdots (١٣٢)$$

هذ واذا فرضنا ان س تصير غير منتهية وصل كسر $\frac{1}{س}$ الى غاية درجة نقصانه فيؤول لا محالة الى صفر وتصير معادلة (١٣١) حينئذ هكذا

$$م = \frac{1}{ح}$$

و... وضعنا هذا المقدار في معادلة (١٣٢) حدث

$$س + ح = س$$

وذلك يورى ان كمية س + ح تؤول الى س متى تكون ... غير منتهية وهذا ما أردنا اثباته

* ٢٢٣ * كمية ح التي تكون س بالنسبة اليها غير منتهية هي المسماة صغيرة جدا بالنسبة الى س

* ٢٢٤ * حيث انا لا نعتبر هنا الا نسب الكميات فالاثبات السابق يتبع ايضا متى يكون الكمية س مقدار منته بشرط ان مقدار ح يكون صغيرا جدا بالنسبة الى كمية س وقضايا الكسور تجعل هذه الدعوة في غاية الوضوح لانه اذا قارنا كمية ... المنتهية بكسر $\frac{1}{ع}$ يتحقق انه كلما

زادت

النواتج المستجد والاول يكون هو تفاضل هذه الدالة

* ٢٣٢ * فلايجاد تفاضل حس مثلا نغير في هذه الدالة س بكمية س + ؤس فتصير ح (س + ؤس) = حس + حؤس واذا طرح منها حس كان الباقي وهو حؤس هو التفاضل المطلوب

* ٢٣٣ نبحث ايضا عن تفاضل حس^{٣} ولذلك نغير س بكمية س + ؤس فيوجد ح (س + ؤس)^{٣} ثم نطرح من هذه النتيجة كمية حس^{٣} ونحل ونختصر فنجد اولا

٣حس^{٢}ؤس + ٣حسؤس^{٢} + حؤس^{٣}

وفي هذا يجب اسقاط كمية حؤس^{٣} حيث انها صغيرة جدا بدرجة ثالثة ولا يمكن أن تزدادها ٣حسؤس^{٢} وحيث ان ٣حسؤس^{٢} صغيرة جدا بدرجة ثانية فينبغي اسقاطها كذلك من جنب ٣حس^{٢}ؤس التي هي صغيرة جدا بدرجة أولى ويبقى ٣حس^{٢}ؤس لاجل التفاضل المطلوب

* ٢٣٤ يؤخذ تفاضل اي دالة لمتغير س من بعد القاعدة السابقة بأن تسقط الصغيرات جدا بدرجة عليا ويؤول هذا الى حفظ الحد الاول من الحل كما فعل في طريقة النهايات

ومثاله لايجاد تفاضل ىس ينظر أنه عوضا عن العمل بطريق النهايات هنا

$$\frac{ى(س+ه) - ىس}{ه} = ع + ح ه + ح' ه^{٢} + ح'' ه^{٣} \ldots \text{الخ}$$

الذي يحدث منه في حالة التحديد والنهاية $\frac{ؤىس}{ؤس}$ ؤس = ع ؤس

لاجل التفاضل يفعل بطريق الصغيرات جدا هكذا

ى(س+ؤس) = ىس + ع ؤس + ح ؤس^{٢} + ح' ؤس^{٣} + ... الخ

وبطرح الدالة الاولية يبقى

ع ؤس + ح ؤس^{٢} + ح' ؤس^{٣} + ... الخ

كسر امقامه يكون غير محدود فنرمز لهابهذا الرمز $\frac{هـ}{\infty}$ ومعلوم ان $\frac{هـ}{\infty}$
او $\frac{هـ}{\infty}$ شيأ واحدا وهذه الكميات ليست الا عدما بالنسبة الى ح

* ٢٢٨ * الصغير جدا بدرجة ولى يسقط متى يكون جانب كمية محدودة لانها لا تزداد به وكذا يسقط الصغير جدا بدرجة ثانية الذى يكون فى جانب صغير جدا بدرجة أولى وهلم جرّا

مثلا اذا كانت هذه الكمية

$$ح + ب‍ص + ه‍ص^٢ + وص^٣$$

وكان فيها ص صغيرا جدا بدرجة اولى كان ه‍ص^٢ صغيرا جدا بدرجة ثانية و ص^٣ صغيرا جدا بدرجة ثالثة ويجب حينئذ اسقاط وص^٣ لان وص^٣ لايمكن أن يزود ه‍ص^٢ وحيث ان ه‍ص^٢ لايزيد ب‍ص فيحذف ايضا وبالجملة يحذف ب‍ص كذلك حيث ان هذا الصغير جدا الذى هو بدرجة أولى لايمكن أن تزداد به كمية ح المحدودة واذن يبقى ح فقط

* ٢٢٩ * الكميتان الصغيرتان جدا س و صَ حاصل ضربهما يكون صغيرا جدا بدرجة ثانية لانه يحدث من حاصل ضربه س × ص هذا التناسب

$$١ : ص :: س : س‍صَ$$

وبه يستدل انه حيث كان ص صغيرا جدا بالنسبة الى ١ فحاصل الضرب س‍ص يكون صغيرا جدا بالنسبة الى س واذن يكون صغيرا جدا بدرجة ثانية

* ٢٣٠ * ويثبت ايضا ان حاصل ضرب الثلاث صغيرات جدا بدرجة أولى يبين صغيرا جدا بدرجة ثالثة

* ٢٣١ * يمكنا الآن شرح نظر التفاضل من بعد طريقة الصغيرات جدا ولاجل ذلك نفرض ان متغير س ياخذ فى دالة ما زيادة صغيرة جدا تبين برمز وَس بحيث تتغير س بكمية س+وَس والفرق بين

الناتج

* ٢٣٩ * متى كانت نقط منحنية المماسات ومرتبها ... يكثر
في حساب التفاضل التزمت ان تبحث بطريقة الصغيرات جدا فنقول ليكن
ع م و ع م (شكل ٤٧) رأسيان متقاربان جدا و م هـ خطا
موازيا لمحور السينات فوق المماس ... يمكن اعتباره كمثلث عنصر من
من المنحنى لانه حيث كان هذا العنصر صغيرا جدا يمكن اعتباره مستقيما
فاذا رمزنا للبعد اح بحرف س وللبعد م ع بحرف ص صارت
زيادة س اى هى ع ع عبارة عن ء س وزيادة ص تكون
م و = ء ص ومثلث م م و الصغير جدا يحدث منه مشابهته لمثلث م ع ط

$$م و : م و :: م ع : ع ط$$

$$ء ص : ء س :: ص : ع ط$$ ومنه يكون

$$ع ط = ص \frac{ء س}{ء ص}$$

ثم يجد العمودي والمماس ومعادلات هذه الخطوط كما في بندى
(٧٠) و (٧١)

* ٢٤٠ * ولمعرفة تفاضل قوس يعتبر القوس المحصور بين رأسيين
ع م و ع م المتقاربين من بعضهما جدا كأنه مستقيم فمن ثمة يحدث من
مثلث م م و القائم الزاوية

$$م م^{٢} = م و^{٢} + م و^{٢}$$

وبالرمز برمز قو للقوس المنحنى يكون م م هو رمز ء قو فتؤول
المعادلة السابقة الى

$$ء قو^{٢} = ء س^{٢} + ء ص^{٢}$$

وباخذ الجذر التربيعي للطرفين يوجد

$$ء قو = \sqrt{ء س^{٢} + ء ص^{٢}}$$

وحيث انه يجب اسقاط الصغيرات جدا بدرجات عالية فلا يحفظ الا حد ح و س الذى يكون هو التفاضل المطلوب

* ٢٣٥ ولايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين ص و ع يفرض ان ص تصير ص + و ص و ع تصير ع + و ع متى تغير س بكمية س + و س فحاصل الضرب ص ع يصير حينئذ محولا الى (ص + و ص)(ع + و ع) وبحله وطرح ص ع منه يبقى ص و ع + ع و ص + و ص و ع وحيث ان الحد الاخير لهذا الناتج صغير جدا بدرجة ثانية فيسقط و يوجد لتفاضل ص ع كمية ص و ع + ع و ص

* ٢٣٦ * ويستخرج من بعد ذلك تفاضل حاصل ضرب جملة مضاريب وبعده تفاضل س^م بالكيفيات التى اتبعناها حين استعملنا طريقة النهايات

* ٢٣٧ * تفاضل كمية $\frac{س}{ح}$ يستخرج ايضا بسهولة متى تحل كمية $\frac{س + و س}{ح}$ وهذا الحل ينال لكل كمية ح^{س+هـ} من بعد بند (٣٦)

ثم يبحث عن مقدار $\frac{س+و س}{ح} - \frac{س}{ح}$ ولا يحفظ منه الا حده الاول وتسقط الحدود الباقية حيث انها صغيرات جدا بدرجات واطية عن درجة الحد المحفوظ و يستخرج من بعد هذا تفاضل لوغا س كما بين

* ٢٣٨ * وبالنظر لتفاضل جاس يوجد

حا(س + و س) ـــ حاس = حاس جتا و س + جا و س جتاس ـــ حاس

وبسبب كون قوس و س صغيرا جدا يكون

جتا و س = ١ و جا و س = و س

و يوجد بواسطة هذه المقادير

و . جاس = و س جتاس

٢ * لما كانت قضية تيلور كثيرة الفوائد والمنافع خصوصا
حل الدوال الى متسلسلات لاح للمعلم لاجرانج كون اصول حساب
ـصر فى هذه القضية ويحدث منها اوس ثم اتها من غير استعمال
ـفاضل بالطريقة الآتية وهى هذه

لتكن صـ = د(سـ + هـ)

لة تؤول بالطبع الى دسـ متى يجعل فيها هـ = ٠
ث وقعا متى كان الجزء المحتوى على هـ فى هذه المعادلة مكررا
. ولنبينه برمز ت هـ فمن ثم يكون

د(سـ + هـ) = سـ + ع هـ

يمكن أن تكون دالة لكمية هـ فاذ رمزنا برمز ع١
به ع حين يفرض فيها هـ = ٠ وكان ك هـ هو الجزء
، او يرتبط بكمية هـ نجد ايضا ع = ع١ + ك هـ
هذا التبيان توجد هذه المعادلات المتوالية

صـ = دسـ + ع هـ
ع = ع١ + ك هـ
ك = ك١ + ر هـ
الخ الخ الخ

دار ع المعلوم بالمعادلة الثانية فى المعادلة الاولى يحدث

صـ = دسـ + ع١ هـ + ك هـ٢

ـضع مقدار ك المعلوم بالمعادلة الثالثة فى هذا الناتج

صـ = دسـ + ع١ هـ + ك١ هـ٢ + ر هـ٣

. هكذا ووضع د(سـ + هـ) محل صـ يوجد عموما

* ٢٤١ تفاضل القوس من منحن ذى احداثيات قطبية يوجد ايضا بغاية السهولة باعتبار الصغيرات جدا ولذلك نفرض (شكل ٨٢) ن م م َ و م هـ يكونان قوسين أحدهما وهو الاول من الدائرة المرسومة بنصف قطر يساوى الواحد وثانيهما من الدائرة المرسومة بنصف قطر يساوى ع ويكونان محصورين فى الزاوية الصغيرة جدا مَ ام المتشكلة من نصفى قطرين احتراقيين فمثلث هـ مَ م يمكن نظره كمثلث مستقيم قائم زاوية هـ ويوجد حينئذ

$$م مَ = \sqrt{هـ مَ^٢ + هـ م^٢}$$

وبمراعاة كون مَ هـ = وع و م هـ يساوى ع وى على مقتضى تناسب ١ : وى :: ع : م هـ
يمكنا أن نبدل هـ مَ و م هـ بمقاديرها ونضع وقو محل م مَ فنجد

$$وقو = \sqrt{وع^٢ + ع^٢ وى^٢}$$

وبمقارنة مثلث م مَ هـ المذكور بمثلث مَ اط يحدث لنا تحت الظل للمنحنى القطبى بواسطة تناسب

$$مَ هـ : م هـ :: ام : اط$$

واذا غيرنا ام فى هذا التناسب بخط ام الذى لا يختلف عنه الا بالصغير جدا حدث

$$وع : ع وى :: ع : اط$$ ومنه يستخرج

$$اط = ع^٢ \frac{وى}{وع}$$

طريقة لاجرانج لاثبات اصول حساب التفاضل من غير اعتبار النهايات والصغيرات جدا وكل كمية يجرى حذفها

٢٤٢

[illegible]

ورضعنا مقادير [illegible]

متسلسلة [illegible]

* ٢٤٥ * [illegible]

(١٣٢) على ما في بند (٢٤٣) فيلزم أن تكون الحدود [illegible] على [illegible]

بقوى متحدة في هذين الحالين [illegible]

بمطابقة الحدود [illegible]

في هذين الحالين

* ٢٤٦ * قد رأيت في بند (٢٤٤) [illegible]

للتعبير [illegible] ومن أجل [illegible]

الذي يضرب في المكرر [illegible] في حل [illegible]

يضرب في المكرر [illegible] في حل [illegible] وعلم جزء [illegible] العلامات

$$د(س+هـ) = د س + \frac{ع}{١} هـ + \frac{ك}{١} هـ^{٢} + \frac{ى}{١} هـ^{٣} + \frac{و}{١} هـ^{٤} + \cdot\cdot \text{ الخ } (١٣٣)$$

* ٢٤٣ * وكمية د(س + هـ) تبين على العموم الدالة التى لم تزل غير محولة الى متسلسلة فاذا غيرت فى هذه الدالة س بكمية س + ى حدث ناتج كما لو غيرت هـ بكمية هـ + ى لان هذه الدالة لا يمكن أن تحتوى على متغير س من غير أن يكون هذا المتغير متبوعا بكمية هـ بلا واسطة فى الحد الذى كحد ل(س + هـ)^{م} مثلا يصير ل(س + ى + هـ)^{م} متى تغير س بكمية س + ى ولاشك ان هذا الناتج ككمية ل(س + هـ + ى)^{م} التى تنتج من وضع هـ + ى محل هـ فى دالة ل(س + هـ)^{م} وماذكر فى شأن هذا الحد يطبق على مابقى من الحدود و يتضح من ذلك أن الطرف الاول لمعادلة (١٣٣) يحدث نواتج متطابقة فى الحالتين ويبنى عليه انه ينتج من حل $د س + \frac{ع}{١} هـ + \frac{ك}{١} هـ^{٢} + \cdot\cdot$ الخ نواتج متحدة بوضع س + ى محل س أو بوضع هـ + ى محل هـ

* ٢٤٤ * فبوضع هـ + ى أولا محل هـ فى حل

$د س + \frac{ع}{١} هـ + \frac{ك}{١} هـ^{٢} + \cdot\cdot\cdot\cdot$ الخ يوجد

$$د س + \frac{ع}{١}(هـ+ى) + \frac{ك}{١}(هـ+ى)^{٢} + \frac{ى}{١}(هـ+ى)^{٣} + \cdot\cdot \text{ الخ } (١٣٤)$$

و بكتابة الحدين الاولين فقط من كل من هذه الكميات ذات الحدين يحدث

$$د س + \frac{ع}{١} هـ + \frac{ع}{١} ى + \frac{ك}{١} هـ^{٢} + ٢ \frac{ك}{١} هـ ى + \frac{ى}{١} هـ^{٣} + ٣ \frac{ى}{١} هـ^{٢} ى + \text{ الخ } (١٣٥)$$

ثم لايجاد الناتج من وضع س + ى محل س فى كمية $د س + \frac{ع}{١} هـ + \frac{ك}{١} هـ^{٢} + \frac{ى}{١} هـ^{٣} + \cdot\cdot$ الخ نراعى ان الزيادة هـ موجودة لا محالة فى هذه المتسلسلة ولاتدخل فى د س ولا فى المكررات $\frac{ع}{١}, \frac{ك}{١}, \frac{ى}{١}, \frac{و}{١}$ الخ التى هى كميات لا يمكن أن تحتوى الا على س ولذلك يمكن اعتبارها دوال لهذا المتغير أعنى س وحيث كانت معادلة (١٣٣) تقع لاى دالة لمتغير س فوضع س + ى فيها محل س بغير

$م = \frac{1}{٢} \times \frac{1}{٣}$ دً س

ونستمر هكذا فنجد على التعاقب جميع مكررات معادلة (١٣٢) فنضع في تلك المعادلة مقادير $م$ و $ك$ و $م$ الخ فنجد

$$د(س+هـ) = دس + هـ دَس + \frac{هـ^٢}{١\times٢} دً س + \frac{هـ^٣}{١\times٢\times٣} دً س + الخ \quad (١٤٠)$$

٢٤٨ * اذا اعتبرت الآن الاولى من معادلات (١٣٨) شوهد أن دَس هي المكرر لكمية هـ في حل د(س+هـ) التي تتبين برمز $\frac{و.دس}{وس}$ أو $\frac{وص}{وس}$ وكذلك باعتبار ثانية معادلات (١٣٨) يعرف ان المكرر دً س للقوة الاولى لكمية هـ في حل دَ(س+هـ) يكون متبينا برمز $\frac{و.دَس}{وس}$ اعني برمز $\frac{و.\frac{وص}{وس}}{وس} = \frac{و^٢ص}{وس^٢}$ وهكذا

هذا واذا وضعت مقادير دَس و دً س و دً س الخ هذه في معادلة (١٤٠) حدث

$$د(س+هـ) = دس + \frac{وص}{وس} هـ + \frac{و^٢ص}{وس^٢} \frac{هـ^٢}{١\times٢} + \frac{و^٣ص}{وس^٣} \frac{هـ^٣}{١\times٢\times٣} + الخ \quad (١٤١)$$

٢٤٩ * فها هو قد تبين قانون تيلور من غير استعمال حساب التفاضل وكمية $\frac{وص}{وس}$ الداخلة في هذا القانون تشير للعملية التي يستخرج بها مكرر هـ في حل د(س+هـ) وحين يوجد ذلك المكرر تبين لنا كميات $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ و $\frac{و^٣ص}{وس^٣}$ و الخ ان العملية المذكورة اذا كررت وأديت تستخرج منها مكررات باقي قوى هـ

واذن لم نحتج الا لمعرفة معنى $\frac{وص}{وس}$ وحقيقته في كل دالة بطرق جبرية فقط

د (س + ه) = د س + ه دَ س + الحدود المحتوية على ه^{٢} و ه^{٣} الخ
دَ (س + ه) = دَ س + ه دً س + الحدود المحتوية على ه^{٢} و ه^{٣} الخ
دً (س + ه) = دً س + ه د‴ س + الحدود المحتوية على ه^{٢} و ه^{٣} الخ   (١٣٨)
الخ   الخ   الخ   الخ

* ٢٤٧ * وحيث كان ح$_{١}$ = دَ س بالفرض بند (٢٤٦)
فاذا جعلنا في هذه المعادلة س = س + ه حدث

ح$_{١}$ + حَ$_{١}$ ه + حً$_{١}$ ه^{٢} + ح‴$_{١}$ ه^{٣} + ... الخ = دَ (س + ه) .... (١٣٩)

وبوضع مقدار دَ (س + ه) المعلوم بثانية معادلات (١٣٨) في هذه المعادلة يوجد

ح$_{١}$ + حَ$_{١}$ ه + حً$_{١}$ ه^{٢} + .. الخ = دَ س + ه دً س + الحدود المحتوية على ه^{٢} و ه^{٣} الخ

وحيث ان هذه المعادلة لاتزال حقيقية مهما كانت كمية ه يلزم ان تكون الحدود المطابقة لقوى واحدة لحرف ه متساوية واذن يوجد

حَ$_{١}$ = دً س

ومقدار حَ$_{١}$ هذا يغير الاولى من معادلات (١٣٧) الى دً س = ٢ ك$_{١}$ الذي يستخرج منه

ك$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ دً س

واذا غيرنا في هذه المعادلة س بكمية س + ه حدث

ك$_{١}$ + كَ$_{١}$ ه + كً$_{١}$ ه^{٢} + ... الخ = $\frac{١}{٢}$ دً (س + ه)

ثم نضع محل دً (س + ه) حلها المعلوم بثالثة معادلات (١٣٨) فنجد

ك$_{١}$ + كَ$_{١}$ ه + كً$_{١}$ ه^{٢} + .. الخ = $\frac{١}{٢}$ (دً س + ه د‴ س + الحدود المحتوية على ه^{٢} و ه^{٣} الخ)

ونطابق الحدود المضروبة في القوة الاولى لكمية ه فنجد كَ$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ د‴ س
وبوضع هذا المقدار في ثانية معادلات (١٣٧) يوجد $\frac{١}{٢}$ د‴ س = ٣ ح$_{١}$
الذي يستخرج منه

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] فيها [illegible] على [illegible]

فهذه [illegible]

كان عبارة [illegible]

ويوجد [illegible] جميع

الحالات التي تدخل فيه [illegible] فهذه [illegible]

[illegible] متتالية [illegible]

[illegible] على ما بند (١٢٩١)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

الافتراق [illegible] المطلوبة [illegible]

[illegible]

ونفرض هذه [illegible] معادلات

[illegible]

[illegible]

متعددة [illegible] متسلسلة [illegible] (١٢١) [illegible]

[illegible]

و[illegible] معادلة (١٣٢) [illegible]

د(ـ + ح) ـ د [illegible] =

[illegible] وهذا [illegible]

(١)

حسب مثلا حقيقة $\frac{و ص}{و س}$ فى الدالة $س^م$ تحال $(س+هـ)^م$ بقانون الكمية ذات

حدين فيوجد $س^م + م س^{م-١} هـ +$ الخ وحيث ان $\frac{و ص}{و س}$ يجب أن يكون

مبيان مكرر القوة الاولى لكمية هـ فى هذا الحل يوجد $\frac{و ص}{و س} = م س^{م-١}$

ومن ثم يؤول الامر الى امكان ايجاد حل الدوال المتنوعة الممكن بيانها بالجبر بواسطة الطرق الحسابية وهذه الطرق لا تختلف عن الطرق التى شرحناها لحل الدوال على اختلافها والتى ينتج منها ما بقى بتعشقها ببعضها وبذلك بينا حلول

$ح^{س+هـ}$ و لوغا $(س + هـ)$ و جتا $(س + هـ)$ و الخ

* ٢٥٠ * ومن ثم صارت هذه الطريقة طريقة ثالثة من بعدها توجد اصول حساب التفاضل مبينة بوجه غير متعلق باعتبار النهايات والصغيرات جدا او كل كمية يحكم بحدفها ومع ذلك كله فلا غنى لهذه الطريقة عن طريقة النهايات لانه متى يجرى تطبيقها ويراد مثلا تعيين الاجسام او السطوح وتعديل المنحنيات او ايجاد كميات تحت المماس وتحت العمودى الخ يستلزم الدخول فى النهايات أو الصغيرات جدا

* ٢٥١ * لاعتبار حلول الدوال المتنوعة $(س+هـ)^م$ و $ح^{س+هـ}$ و لوغا $(س+هـ)$ وجا$(س+هـ)$ و الخ التى تعلم من علم الجبر يقال حيث ان هذه الدوال محدودة العدد يسهل معرفة كون مكرر القوة الاولى لكمية هـ فى حلولها لا يكون صفرا ولا غير منته مادام الى س مقدارها غير المعين وذلك ينتج من الاثبات السابق لانه اذا فرضنا $ح_١ = ٠$ فى معادلة

$$د(س+هـ) = د س + ح_١ هـ + ك_١ هـ^٢ + ك_٢ هـ^٣ + ..الخ$$

تقع حالتان وهما اما أن يعلم مقدار س الداخل فى $ح_١$ بمعادلة

متطابقة

في جميع المواضع التي كانت فيها س ولذا متى احتوت د س على جذر
كانت د(س+هـ) مشتملة على هذا الجذر ايضا
فاذا كانت $د س = س^2 + \frac{ح}{\sqrt{س}}$ مثلا فان الجذر يوجد نفسه في كمية

$$د(س+هـ) = (س+هـ)^2 + \frac{ح}{\sqrt{س+هـ}}$$

* ٢٥٤ ولا يكون كذلك دائما اذا أخذت س مقدارا مخصوصا (والمراد به متعينا) مثلا اذا كان $\sqrt[3]{س-ح}$ يدخل في د س يلزم أن تشتمل د(س+هـ) على حد

$$\sqrt[3]{س+هـ-ح}$$

ولكن $\sqrt[3]{س-ح}$ يحذف من د س بفرض $س = ح$ ولا يحذف $\sqrt[3]{س-ح+هـ}$ الداخل في د(س+هـ) بهذا الفرض بل يؤول الى $\sqrt[3]{هـ} = هـ^{\frac{1}{3}}$ واذن يشتمل د(س+هـ) على جذر لا يوجد في د س ولا يمكن حله بحسب القوى الصحيحة لكمية هـ وعدم الامكانية هذه تحقق بالمقادير غير المحدودة التي تأخذها المكررات التفاضلية مثلا اذا وجدت معادلة

$$ص = \sqrt[3]{س-ح}$$

فانه يكون باخذ تفاضلها

$$\frac{وص}{وس} = \frac{1}{3}(س-ح)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(س-ح)^2}}$$

ويرى ان مقدار هذا المكرر التفاضلي يصير غير محدود متى تجعل $س = ح$
* ٢٥٥ * ولكن على العموم

$$د(ح+هـ) = ع + \frac{عَ هـ}{١} + \frac{عً هـ^2}{١.٢} + \frac{ع هـ^3}{١.٢.٣} \cdots + \frac{ع^{(ن)} هـ^{ن}}{١.٢ \cdots ن} + \cdots الخ$$

تكون الدالة المذكورة متطابقة أو ثابتة لانه يعرف انه اذا كانت د س
بهذه الصورة س٢ ـ س٢ مثلا او كانت على صورة ث + س٢ ـ س٢
فان وضع س + هـ محل س يحدث ناتجا واحدا أبدا و يشاهد أن
الدالة تكون فى الحالة الاولى متطابقة وتؤول فى الثانية الى كمية ثابتة ث
و ينبنى على هذا وذلك ان سكرر القوة الاولى لكمية هـ لايمكن أن يكون صفرا
فى الحل العمومى لدالة (س + هـ)

ولايستحيل فرض هذا المكرر غير محدود لانه حين يكون الطرف
الثانى لمعادلة (١٣٣) غير محدود يكون الطرف الاول كذلك
يعنى انه يكون د (س+هـ) = ∞ وحيث ان د (س+هـ)
تتركب من س + هـ كما تتركب د س من س فالحد الداخل
فى د(س+هـ) الذى يجعلها غير محدودة يجعل ايضا د س غير محدودة
ومثاله انه اذا كانت د(س+هـ) تحتوى على حد غير محدود وليكن
$\frac{ا}{(س+هـ)}$ يقتضى أن تكون د س محتوية ايضا على حد
$\frac{ا}{س}$ يكون غير محدود كذلك وينتج من ذلك أن الدالة المفروضة تكون
غير محدودة ولا نفرض ذلك

* ٢٥٢ * كميات د س و د٢ س و د٣ س و الخ
هى التى سماها لاجرانج الدالة الاولى والدالة الثانية والدالة الثالثة و الخ
لدالة س وعلى العموم تسمى بالدوال المشتقة وقد بين لاجرانج المذكور
ايضا الدوال المشتقة بوجه آخر بابدال $\frac{و\,ص}{و\,س}$ برمز صَ و $\frac{و^٢ص}{و\,س^٢}$
برمز صً و $\frac{و^٣ص}{و\,س^٣}$ برمز صً وهلم جرا

(فى الحالات التى يختل فيها قانون تيلور)

* ٢٥٣ * عموما متى توضع س + هـ محل س فى دالة
لمتغير س فان صورة هذه الدالة تبقى متحدة حيث ان س+هـ تدخل

ونتمكن تعيين المكررات ح و خ و غ الخ لمعادلة (١٠٢)
هذه ومن بعد ما مر في معادلات (١٤٤) و (١٤٥) يعرف أنه
تنقص واحد في كل مرة نعمل التفاضل ومتى ينتهي في التفاضل سوف يوجد

$$\frac{ف^ن د(ح+ه)}{ف ح^ن} = ن ا ه^{ن-ب} + ... + خ^غ ...$$

ونجد لاجل التفاضل الآتي بعد

$$\frac{ف^ن د(ح-ه)}{ف ح^{ن+1}} = س ه^{غ-1} + الخ$$

وحيث يكون غ أقل من الواحد فكمية غ — ١ تدل على عدد سالب
ويمكن حينئذ كتب المعادلة السابقة هكذا

$$\frac{ف^ن د(ح-ه)}{ف ح^{ن+1}} = \frac{س}{ه^{(1-غ)}} + خ$$

وعلى موجب ذلك متى يجعل ه = ٠ لاجل تعيين مكرر احد حدود
معادلة (١٤٢) يوجد

$$\frac{ف^ن د(ح)}{ف ح^{ن+1}} = ٠ = س$$

ويكون كذلك متى يراد تعيين مكررات تفاضلية مرتبة على ارتفاع
من ه . قضية انه متى يجعل س = ح في حل د(س + ه)
ان وجدت قوة كسرية لكمية ه فانه لا توجد المكررات حدود

المتنوعة بالكمية ه^ن و ه^{ن-} فلا يمكن تعيين حدود متناسبة لايجاد ...

الحل الذي يوجد بجعل س = ح والذى فيه ن + ١/ع يبين كميه تقع بين ن و ن + ١ فنثبت الآن ان المكرر التفاضلى برتبة ن + ١ غير محدود ولاجل ذلك نتطر ح كمتغير فنجد على ما فى بندى (٥٣) و (٥٤)

و·د(ح+ه)/وح = و·د(ح+ه)/وه و و٢·د(ح+ه)/وح٢ = و٢·د(ح+ه)/وه٢ الخ (١٠٣)

ثم نأخذ تفاضل معادلة (١٤٢) بالتوالى بالنسبة الى هـ ونرمز لاجل الاختصار برموز مَ و اً و مً و اً و الخ لما نؤول اليه المكررات م و ا عندذلك فنجد

و·د(ح+ه)/وه = عَ + ٢ عً ه + ٣ عٍ ه٢ ... + مَ ه ن−١ + اً ه ن+١/ع−١ + الخ

و٢·د(ح+ه)/وه٢ = ٢ عً + ٢×٣ عٍ ه ... + مً ه ن−٢ + اً ه ن+١/ع−٢ + الخ

الخ و الخ و الخ و الخ

ونبدل الاطراف الاول لمعادلات الاخيرة هذه بمقاديرها المستخرجة من معادلات (١٤٣) فيحدث لنا

و·د(ح+ه)/وح = عَ + ٢ عً ه + ٣ عٍ ه٢ + مَ ه ن−١ + اً ه ن+١/ع−١ + الخ (١٤٤)

و٢·د(ح+ه)/وح٢ = ٢ عً + ٢×٣ عٍ ه ... + مً ه ن−٢ + اً ه ن+١/ع−٢ + الخ (١٤٥)

الخ الخ الخ الخ

ثم نجعل هـ = ٠ فى معادلات (١٤٢) و (١٤٤) و (١٤٥) و الخ فيوجد

د ح = ع و وداح/وح = عَ و و٢د ح/وح٢ = ٢ عً و الخ

وذلك

فهذا الحل يكون غير ممكن

وفي هذه الحالة يوضع من بعد القاعدة السابقة س + هـ محل س

في معادلة د س = ٢ ح س − س٢ − ح √ س − ح فيوجد

د (س + هـ) = ٢ ح س + ٢ ح هـ − س٢ − ٢ س هـ − هـ٢ + ح √ [illegible]

وهذه المعادلة تصير بفرض س = ح

د (ح − هـ) = ح٢ − هـ٢ − ح √ −٢ ح هـ + هـ و

د (ح + هـ) = ح٢ − هـ − ح √ [illegible]

ونحل بقانون الكميات [illegible] هذه المعادلة نرمز لاجل

الاختصار للمكررات التي تحدث [illegible] ح ، ح و ح و ح

ونجد

√ [illegible] هـ = (٢ ح + هـ)^(١/٢) = [illegible] ح هـ − ح هـ٢ [illegible] ح هـ٣ [illegible] الخ

ونضع هذا المقدار في المعادلة الاخيرة فتصير

د (ح + هـ) = ح٢ − هـ٢ + ح ح √ [illegible] هـ [illegible] ح ح هـ √ [illegible] هـ [illegible] ح ح √ [illegible] هـ [illegible]

ويشاهد بهذا المثال انه بوضع س + هـ [illegible] نجعل س = ح

يمكن ادخال قوة او جملة قوى كسرية للكمية هـ [illegible] في

المادة [illegible] لان تكرر [illegible] [illegible]

او [illegible] وفي هذه الحدود [illegible]

* ٢٥٨ * وقد ثبت لاجرنج ان حل د (س + هـ) [illegible] في

حدود متنوعة قوة كسرية الى هـ متى كانت س [illegible]

ولذلك يفرض د (س + هـ) = د س + ع هـ + [illegible] هـ٢ ... + [illegible] √٣ هـ

وحيث كان [illegible] √٣ هـ يقبل ثلاث مقادير والتكن م و [illegible] و ع

توجد هذه الحلول الثلاث لدالة (س + هـ)

درجة ن وهو اى الحدّ الذى درجته ن من ضمنها وجميع الحدود لاخر تصير غير محدودة

* ٢٥٦ * المفروض دالة لمتغير س متبينة برمز دس ويراد تعيين حل د(س+ه) فى حالة فرضية س = ح ولذلك لزم كما تبين ان تحسب حدود متسلسلة

$$دس + \frac{وا صـ}{وا س} ه + \frac{وا^{٢} صـ}{وا س^{٢}} \frac{ه^{٢}}{١×٢} + \cdots\cdots \text{ الخ}$$

ولكن اذا صار بعمل هذا الحساب احد المكررات التفاضلية غير محدود فى حال فرضية س = ح فلا يبحث عن حل د(س+ه) بمتسلسلة تيلور وها هى الطريقة اللازم استعمالها

يوضع س + ه محل س فى دس فحينئذ يحتوى الحد الذى كان يشتمل على س ــ ح فى المقام على س ــ ح + ه ولا يصير غير محدود متى تجعل س = ح لكنه ينشأ عنه حد متبوع بقوة كسرية لكمية ه

* ٢٥٧ * وليكن مثلا

$$دس = ٢ح س - س^{٢} + ح\sqrt{س^{٢} - ح^{٢}}$$

فبأخذ التفاضل يوجد

$$\frac{وا صـ}{وا س} = ٢(ح - س) + \frac{ح س}{\sqrt{س^{٢} - ح^{٢}}}$$

وبوضع هذه المقادير ومقادير $\frac{وا^{٢} صـ}{وا س^{٢}}$ و $\frac{وا^{٣} صـ}{وا س^{٣}}$ و الخ

فى قانون تيلور بند (٥٥) يوجد

$$د(س+ه) = ٢ح س - س^{٢} + ح\sqrt{س^{٢} - ح^{٢}} + [٢(ح - س) + \frac{ح س}{\sqrt{س^{٢} - ح^{٢}}}] ه + \text{الخ}$$

وحيث ان الحد المضروب فى ه يصير غير محدود متى تجعل س = ح

فهذا

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{دس} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{م}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{دس} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{ن}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{دس} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{ح}$$

لكن دس ينبغى أن تحتوى على جذور واحدة كدالة (س + ه) كما فى بند (٢٥٣) فيلزم أن يكون لدالة س ايضا ثلاث مقادير مختلفة ك و ر و و وبوضع هذه المقادير على التوالى محل دس يوجد حينئذ

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ك} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{م}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ك} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{ن}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ك} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{ح}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ر} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{م}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ر} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{ن}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{ر} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{ح}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{و} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{م}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{و} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{ن}$$
$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{و} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \text{ح}$$

واذن توجد لدالة (س+ه) بحلها تسع مقادير مختلفة بخلافها غير محلولة فانه لا يوجد لها الا بقدر ما لدالة س من المقادير وعلى ذلك يكون لها ثلاثة فى الحالة الاتيـة وحينئذ لا يمكن أن يفرض ان حل د(س+ه) يحتوى على أس كسرى لكمية ه من غير الوقوع فى المناقضة

* ٢٥٩ * وتسهل البرهنة ايضا على ان د(س+ه) لا يمكن أن تشتمل فى حلها على حد متبوع بأس سلبى لكمية ه لانها اذا كانت تحتوى على حد كحد $\text{م ه}^{-\text{ن}}$ يوجد

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{دس} + \text{ج}_{1}\text{ه} + \text{ك}_{1}\text{ه}^{2} \cdots + \frac{\text{م}}{\text{ه}^{\text{ن}}}$$

ويجعل

لوغا(١+س)^٢ = ٢ح س + {ح^٢ + ٢ء} س^٢ + {٢ءح + ٢ى} س^٣ ... الخ (١)

وغير ذلك حيث ان خاصية اللوغاريتم مبينة فى هذه المعادلة لوغ ء^ن = ن لوغ ء نجد

لوغا(١+س)^٢ = ٢(ح س + ء س^٢ + ى س^٣ + ... الخ)

وبوضع مقدار لوغا (١+س)^٢ هذا فى الطرف الاول لمعادلة (١) فيحصل معادلة تحقق بجميع المقادير التى تعطى الى متغير س واذن يحدث مساواة الحدود المتبوعة بقوى متحدة لحرف س ببعضها

٢ح = ٢ح و ح^٢ + ٢ء = ٢ء و ٢ءح + ٢ى = ٢ى الخ

ويستخرج من ذلك

ء = − ح/٢ و ى = ح/٣ الخ

وبوضع هذه المقادير نجد

لوغا(١+س) = ح(س − س^٢/٢ + س^٣/٣ − ... الخ) ... ث

ومتى يكون س = ٠ يوجد لوغا ١ = ٠ = ث وبهذا يعلم انه لا يوجد كمية ثابتة ينبغى اضافتها

واذا جعلنا س = هـ/س نجد

لوغا(١ + هـ/س) او لوغ (س+هـ)/س و

لوغا(س+هـ) − لوغا س = ح(هـ/س − هـ^٢/٢س^٢ + هـ^٣/٣س^٣ − ... الخ)

وبالقسمة على هـ يكون

(لوغا(س+هـ) − لوغ س)/هـ = ح(١/س − هـ/٢س^٢ + هـ^٢/٣س^٣ − ... الخ)

وبالارتقاء الى النهاية نجد

ولما كان هذا آخر ما اورده المؤلف فى حساب التفاضل ان لنا أن نشرح الملحوظات المعبر عنهما فى باطن هذا الكتاب ثم نلحقهما بقضايا لطيفة للمنرودات المائلة تتعلق بعلم الضوء للامير بيك ناظر مدرسة المهندسخانة الخديوية ببولاق فنقول

المحوظة الاولى (بند ٥٩)

على كيفية ايجاد حل لوغاريتم س + هـ

هاهى أحد الطرق المستعملة لايجاد لوغاريتم س + هـ

يبحث اولا عن لوغا(١ + س) بالكيفية الآتية وهى أن يساوى لوغا(١ + هـ) بجملة حدود مرتبة بحسب قوى س بأن يراعى اولا انه لا يوجد فى هذه المتسلسلة حد غير معلق بتغير س لانه اذا وجد

$$\text{لوغا}(١ + س) = ع + حس + حَ س^{٢} + \dots \text{الخ}$$

فهذه المعادلة لاتزال متحققة مهما كان متغير س وينتج منها انه بجعل س = ٠ فيها يوجد

$$ع = \text{لوغا}\ ١ = ٠$$

ولذا نضع

$$\text{لوغا}(١+س) = ع س + ح س^{٢} + حَ س^{٣} + حً س^{٤} + \dots \text{الخ} \quad (١)$$

وبتغيير س بكمية ز يوجد كذلك

$$\text{لوغا}(١ + ز) = ع ز + ح ز^{٢} + حَ ز^{٣} + حً ز^{٤} + \dots\dots\dots \text{الخ}$$

وحيث كانت ز حيث ما اتفقت فيمكن فرض هذه المعادلة $(١+س)^{٢}$ أو $١ + ٢س + س^{٢} = ١ + ز$ بين س و ز ثم يستخرج منها مقدار ز ويوضع فى معادلة (١) فيوجد

$$\text{لوغا}(١+س)^{٢} = ع(٢س + س^{٢}) + ح(٢س + س^{٢})^{٢} + حَ(٢س + س^{٢})^{٣} + \text{الخ}$$

وبواسطة الحل والترتيب بحسب قوى س يكون

لوغا

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\frac{و\,لوغا\,س}{و\,س} = \frac{ح}{س}$$

ومن ثم يكون تفاضل لوغ س هكذا ح $\frac{و\,س}{س}$ وينظر ان ثابتة ح ليست

اداتيرس

* المخروطة النائية (بند ٢٤٥) *

على القاعدة الاساسية لطريقة المكررات الغير المتعينة

يمكن الاثبات بالوجه الآتي على انه متى تكون المعادلة التى كمعادلة

$$ح س^{٤} + حَ س^{٣} + حً س^{٢} + حٌ س + و = ٠ \quad (٣)$$ مثلا

متحققة مهما كانت س يلزم أن يكون كل من المكررات ح و حَ و حً و حٌ و و

صفرا لانه حيث كانت س تقبل اى مقدار كان يمكن وضع س = ٠

وتؤول معادلة (٣) حينئذ الى و = ٠

ولما كانت و غير معلقة بتغير س فتكون صفرا ايضا متى لا تكون س

صفرا وينتج من ذلك ان معادلة (٣) تختصر الى هذه

$$ح س^{٤} + حَ س^{٣} + حً س^{٢} + حٌ س = ٠$$

وباسقاط المضروب المشترك س يبقى

$$ح س^{٣} + حَ س^{٢} + حً س + حٌ = ٠$$

ثم نطبق ما ذكر بخصوص معادلة (٣) على هذه المعادلة فيتضح لنا ان حٌ

تكون صفرا وبالمداومة هكذا يظهر على التعاقب كون المكررات الاخر

تكون كذلك

(فى المفرودات المماثلة للامبيد)

فى البحث عن منحنيات الانعكاس المستوية المسماة كوستيك

الملف المشترك لجميع الخطوط العمودية على خط منحن مستو هو المسمى

مفرود هذا المنحنى ونقطة تماس هذا الملف بكل عمود يقال لها مركز

الانحنا

نق + وا قو = نق + وا ق + وا قو جتاب وبالاختصار يحدث

وا قو = وا ق + جتب وا قو .... (١)

ويوجد ايضا

زاوية م ح و = ... = وا قو / (نق + وا ق) وزاوية م و = ... = وا قو جتاب / (نق + وا قو)

ولكن بسبب تساوى زاويتى مثلثى م و ح و م و ... يوجد

زاوية وم ح + زاوية و ح م = زاوية و م ... + زاوية و ...

واذن يكون بالاستبدال

ب + وا قو / (نق + وا ق) = (ب + وا ب) + وا قو جتاب / (نق + وا قو) وباسقاط

المشترك من الطرفين يكون

وا قو / (نق + وا ق) = وا ب + وا قو جتاب / (نق + وا قو) وبحذف المقامات يكون

(نق + وا قو) وا قو = (نق + وا ق) (نق + وا قو) وا ب + (نق + وا ق) وا قو جتاب

وبحل هذه الضروب واسقاط الحدود المشتملة على التفاضلات بدرجات

دون الواحد وقسمة جميع الحدود على وا قو يحدث

وا ب / وا قو = ... (٢)

ويوجد اخيرا

قطاع م ح م = ... × ح م و قطاع م ... = ... × ... بعنى

الانحنا المطابقة لاحد مفرودات هذا المنحنى المائلة وليكن و تقاطع
حَ مَ و اَ م هذا وتجعل نقطة مَ مركزا وببعدها عن نقطة م يرسم
قوسا من دائرة ينتهى فى ا على امتداد اَ مَ ثم يرمز برمز قو للقوس
من المنحنى م مَ المعدود من م نحو مَ ويرمز قوا للقوس من المنحنى
اَ اَ المحسوب من ا نحو اَ ويرمز نق لنصف قطر الانحنا العمودى
حم ويرمز نقا لنصف قطر الانحنا المائل ام ويرمز ب لزاوية حم ا
الواقعة بين نصفى قطرى الانحنا هذين ويرمز ع لذى الاربعة اضلاع
المحدود بخطوط مستقيمة ومنحنية م ح حَ مَ ويرمز عَ لذى الاربعة
اضلاع م ا اَ مَ

فاذا فرضنا نقطة مَ قريبة جدا من نقطة م فنقط حَ و اَ تكون
كذلك قريبة جدا لنقط ح و ا واقواس ح حَ و ا اَ يمكن
اعتبارها كالامتدادات المستقيمة لخطى م ح و م ا على الولا
ومساحات م ح حَ مَ و م ا اَ مَ يمكن اعتبارها ايضا كقطاعات بسيطة
اوكمثلثات كذلك وما كخط عمودى على ام اوعلى اَ مَ فيوجد
فى هذه الحالة

م مَ = و قو و ح حَ = و نق و ا اَ = و قوا

م حَ = نق + و نق و م اَ = نقا + و نقا وزاوية حَ مَ اَ = ب + و ب

ثم بعد ذلك يوجد أن

م ا = م مَ جتا ب = و قو جتا ب و مَ ا = م مَ جا ب = و قو جا ب

ولكن

اَ م + ا اَ = اَ مَ = ا مَ = اَ مَ + مَ ا

فيوجد بالوضع حينئذ

نقا

[illegible]

وأع = ـ ر ق + وانق) وأقو و وأع َ = ½ (ا ب + وا ب) وأقو جة .

وباستنباط الحدود المشتمرة على القوى الثانية للتفاضلات يكون

وا ب = . قو قو ٠ (٣) و وأع َ = ½ ن وأقو حتاب ٠٠٠٠ (٤)

وهذه النتيجة ... لايجاد بواسطة الطرق الاعتيادية الهندسية ... كما هو مشروح رسمه ولكن يتيسر فى جميع الحالات أن نعين بها العلامات التى تستدعى احوالا خصوصية يمكن ايجادها فيها

و يوجد لاجل المفرودين المائلين لمنحن واحد مفروض جملتان من المعادلات المتماثلة يعنى انه بالتأشير بالعلامات على الصور المتعلقة بالمفرود الثانى المائل نجد بين الفرادين الاخر هذه الاربع معادلات

وا قو = وانق + وا قو جاب ٠٠ (١) و وا قو َ = وا نو َ + وا قو حاب َ (٢)

وا ب / وا قو = ١ / ن − حتاب / ن ١ ( ) و وا ب َ / وا قو = ١ / ن − حتاب َ / ن ١ (٣)

ويمكن فرض كون انصاف أقطار الانحناء لاحد الجملتين تكون الاشعة الساقطة المماس جميعها لاحد المفرودات المائلة والمنحنى المفروض يكون هو المنحنى المنعكس او الفارق للمادتين المتجانستين بشدة مختلفة وكون انصاف الاقطار الانحنائية المائلة للجملة الاخرى تكون هى الاشعة المنعكسة او المنكسرة عند مقابلتها هذا المنحنى والمماس جميعها بالمفرود المائل الآخر الذى يكون بهذا الوجه هو الكوستيك بالانعكاس او بالانكسار حال كونه متكونا من انصاف الاقطار هذه

ولاجل ذلك يلزمنا بحسب قواعد الضوء أن نربط معادلة $\frac{\text{جاب}}{\text{جاب َ}} = \frac{\text{ف}}{\text{ف َ}}$ (٥)

التى فيها رمزا ف و ف َ يبينان عددين ثابتين لايختلفان فى حالة الانعكاس الخصوصية عن بعضهما الا فى الاشارة بالاربع معادلات المرقومة اعلاه

وان نق يكون غير محدود آلات ترك لمعادلة بالاختصار الى

[illegible] = ٠ الذي يحدث منه [illegible] = [illegible] ... (١)

وحينئذ تكون ابعاد النقطة الشعاعية [illegible]

الحاصل في هذه [illegible]

الاكسر

وان كان [illegible]

مرة او جملة مرات [illegible]

ينفوذ حيث [illegible]

الذى تكون الشعة [illegible]

بواسطة الفرق [illegible]

اعتبر [illegible] (٥ او ٦) [illegible]

الناتج من الانسارات متعاقبة كيف ما يرد

ولاجل [illegible]

[illegible] فتصب [illegible]

من النقطة [illegible]

[illegible]

[illegible]

الشية الى النقطة [illegible]

الزوايا لسقوط [illegible]

في [illegible] على (٥) و [illegible]

المنحنى الفاصل

ونـ رضعنا معادلة (٦) بهذه الصورة

$$\frac{\text{جاب جتا}\,\bar{\text{أ}}}{\text{نق}_{\text{ا}}} - \frac{\text{جا}\bar{\text{ب}}\,\text{جتا}\,\text{أ}}{\text{نق}_{\text{ا}}} = \frac{\text{جاب جتا}\bar{\text{ب}} - \text{جا}\bar{\text{ب}}\,\text{جتاب}}{\text{نق}}$$

ووضع فيه استدارجات المستخرج من معادلة (٥) عوضا عنه صارت تلك المعادلة منقسمة على جاب وتؤول الى

$$\frac{\text{ف جتا}\,\text{أ}}{\text{نق}_{\text{ا}}} - \frac{\bar{\text{ف}}\,\text{جتا}\,\text{أ}}{\text{نق}_{\text{ا}}} = \frac{\text{ف جتا}\bar{\text{ب}} - \bar{\text{ف}}\,\text{جتاب}}{\text{نق}} \quad \cdots\cdots \ (٧)$$

واذا فرضنا الآن ان زاوية السقوط تكون صفرا فمعادلة (٥) تبين ان زاوية الانكسار تكون كذلك ولذا يوجد

جتاب = جتا $\bar{\text{ب}}$ = ١ وبه تؤول معادلة (٧) الى

$$\frac{\text{ف}}{\text{نق}_{\text{ا}}} - \frac{\bar{\text{ف}}}{\text{نق}_{\text{ا}}} = \frac{\text{ف} - \bar{\text{ف}}}{\text{نق}} \quad \cdots\cdots\cdots \ (٨)$$

وحينئذ متى تكون الاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة فان هذه المعادلة تحدث بالسهولة التامة النقطة التي يوجد على نصف القطر العمودي من الكوستيك بالانكسار وهذه النقطة هي التي تسمى بالنقطة الاحتراقية متى يكون المنحنى الفاصل دائرة

واذا فرض في حالة الدائرة ان النقطة الشعاعية تكون على بعد غير محدود فمعادلة (٨) تؤول الى

$$\frac{\text{ف}}{\text{نق}_{\text{ا}}} = \frac{\text{ف} - \bar{\text{ف}}}{\text{نق}} \quad \text{الذي يستخرج منه} \quad \text{نق}_{\text{ا}} = \frac{\text{ف}}{\text{ف} - \bar{\text{ف}}}\,\text{نق} \quad (٩)$$

وبهذا تعرف موضع النقطة الاحتراقية للاشعة المتوازية وتسمى هذه النقطة الاحتراقية في هذه الحالة النقطة الاحتراقية الاصلية

واذا فرض في معادلة (٨) ايضا ان الخط الفاصل يصير خطا مستقيما

أو

جاب = جاب = ن ...... (٢)
جابَ = جابَ = نَ

واذن يمكن اعتبار جن هذين ... في العادة

ويستخرج من معادلتي (١) و (١) ...

وقو — وق = جاب / جبَ = ن / نَ ...
وقوَ — وقَ

وقو — وق / ن = وقوَ — وقَ / نَ ...

قو — ق / ن = قوَ — قَ / نَ = ث

[illegible]

لانعة الساقطة ... [illegible]

[illegible]

قو — ق = [illegible]

[illegible] طلب ما يكون الذي الماصل حتى يجتمع ... [illegible]

[illegible]

تصير معادلة (١٣) ... [illegible]

$$\frac{\text{جاب}}{\text{جاب}'} = \frac{\text{ف}}{\text{ف}'} \quad \text{و} \quad \frac{\text{جاب}''}{\text{جاب}'} = \frac{\text{ف}''}{\text{ف}'}$$

$$\frac{\text{ف جتا ب}'}{\text{ن}} - \frac{\text{ف}' \text{جتا ب}}{\text{ن}'} = \frac{\text{ف جتا ب}' - \text{ف}' \text{جتا ب}}{\text{نق}}$$

$$\frac{\text{ف}'' \text{جتا ب}''}{\text{ن}} - \frac{\text{ف}' \text{جتا ب}'}{\text{ن}'} = \frac{\text{ف}' \text{جتا ب}'' - \text{ف}'' \text{جتا ب}'}{\text{نق}'}$$

ويستخرج من الاخيرتين

$$\text{نق}' = \frac{\text{ف جتا ب}'}{\frac{\text{ف}' \text{جتا ب}}{\text{ن}} + \frac{\text{ف جتا ب}' - \text{ف}' \text{جتا ب}}{\text{نق}}}$$

$$\text{نق}'' = \frac{\text{ف}'' \text{جتا ب}''}{\frac{\text{ف}' \text{جتا ب}'}{\text{نق}'} - \frac{\text{ف}' \text{جتا ب}'' - \text{ف}'' \text{جتا ب}'}{\text{نق}'}}$$

ولكن هنا $\text{ن}'$ و $\text{نق}'$ لهما جهة واحدة تشتمل على نقطتى السقوط فاذن يكون البعدين هاتين النقطتين الاخيرتين مساويا لجمعهما او لفرقهما وبالرمز بحرف $\text{هـ}'$ لهذا البعد يوجد حينئذ

$$\frac{\text{ف جتا ب}'}{\frac{\text{ف}' \text{جتا ب}}{\text{نق}} + \frac{\text{ف جتا ب}' - \text{ف}' \text{جتا ب}}{\text{نق}}} \pm \frac{\text{ف}'' \text{جتا ب}''}{\frac{\text{ف}' \text{جتا ب}''}{\text{نق}''} - \frac{\text{ف}' \text{جتا ب}'' - \text{ف}'' \text{جتا ب}'}{\text{نق}'}} \quad (11)$$

وهو القانون الذى يخدم باعتبار $\text{نق}''$ فيه مجهولا لايجاد الكوستيك الذى يحدث من انكسارين متواليين بالسقط بلا واسطة من غير الاحتياج الى رسم الكوستيك المتوسط

اذا كان السطحان الفاصلان وجهين لجسم واحد شفاف يلزم أن تربط بمعادلة (١١) المعادلة المضاعفة هذه

جاب

وبذلك تتعين النقطة الاحتراقية فى المراآيات الدائرية و تدعى النقطة الاحتراقية الاصلية او النقطة الاحتراقية للاشعة المتوازية توجد معادلة (٩)

$$\text{نق}'_{\text{ا}} = \frac{\text{نق}}{٢} \quad \cdots\cdots \quad (١٧)$$

واذا صار الخط المعكس مستقيما وكانت النقطة الشعاعية حيث ما تفق حدث

$$\text{نق}'_{\text{ا}} = - \text{نق}_{\text{ا}} \quad \cdots\cdots \quad (١)$$

وبالجملة فيتوصل بواسطة معادلة (١٥) الى تعيين جهة الكوستيك الذى يحدث من عدد انعكاسات متوالية حيث ما اتفق بدون الاحتياج الى رسم الكوستيكات المتوسطة واما من قبل الخط الاول نيتيك بالانعكاس فانه يكون معلوما (١٤) بمعادلة

$$\text{نق}_{\text{ا}} + \text{نق}'_{\text{ا}} = \text{ثابتة}$$

يعنى ان هذا الخط يكون قطعا ناقصا اوقطعا زائدا بحسب كون $\text{نق}_{\text{ا}}$ و $\text{نق}'_{\text{ا}}$ متحدة فى الاشارة او مختلفة فيها وعلى ذلك يكون قطعا مكافئا متى كانت احدى النقطتين الثابتتين بعيدة غاية و نهاية

اذا فرض نق ثابتا فى قوانين (٦) و (١) ووضع $\text{قو}_{\text{ا}} = ٠$ فيها فان هذه القوانين تدخل وتنحصر فى قوانين المعلم تيت المشهورة فى رسالته للمعلم هاشيت فى شأن الحالة التى يكون فيها منحنى معكس او متاصل دائرة والاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة ولكن يرى هنا كذلك كون هذه القوانين لها مدلولات متسعة

ومن العجايب ان بوتيت لم يفتكر فى شرحها وبسطها على ما ينبغى تتمة كان يمكنه أن يعتبر فى الحقيقة انه متى تنعكس او تنكسر الاشعة لسطح مستو فان ما يقابلها منحنى افق حيث ما اتفق يمكن اعتبار احد هذه الاشعة كصادر من

$$\frac{\text{نق}}{\text{ف}} - \frac{\text{نق}_1}{\text{ف}'} = \frac{\text{نق}'}{\text{ف}} - \frac{\text{نق}'_1}{\text{ف}'} = \text{ثابتة} \quad \cdots\cdots \quad (١٤)$$

وهذه هى المعادلة الارتباط الكائن بين ابعاد نق_1 و $\text{نق}'_1$ لنقط مختلفة من المنحنى المطلوب عن نقطتين ثابتتين معلومتين فينتج من ذلك بسهولة ان معادلة ذلك المنحنى باحد ثبات عمودية ترتفع الى الدرجة الرابعة وانواع هذه المنحنيات كانت مسماة خطوط ابلانيتيك للمعلم كنلى الذى هيأ لها جملة مباحث غريبة فى مراسلاته وفى كتبه أو دفاتره الخاصة

وجميع ماذكر يطبق بلا واسطة على الانعكاس بفرض $\text{ب}' = -\text{ب}$ فقط الذى ينتج منه

$$\text{جاب}' = -\text{جاب} \text{ و } \text{جتاب}' = \text{جتاب} \text{ و } \text{ف}' = -\text{ف}$$

وحينئذ متى كانت الاشعة الساقطة مماسة بكليتها لمنحن واحد ورمزنا برمز نق لطول الشعاع الساقط المحسوب من ابتدا هذا المنحنى الى نقطة السقوط وبرمز $\text{نق}'_1$ لطول الشعاع المنعكس المحسوب من ابتدا نقطة السقوط الى الكوستيك ورمزنا اخيرا برمز نق لنصف قطر الانحنا للمنحنى المعكس فى نقط السقوط توجد معادلة (٦) هكذا

$$\frac{1}{\text{نق}_1} + \frac{1}{\text{نق}'_1} = \frac{2}{\text{نق جتاب}} \quad \cdots\cdots \quad (١٥)$$

وهو قانون سهل لاجل رسم الكوستيك بالانعكاس بواسطة النقط متى يعلم المنحنى المعكس والمنحنى الذى تماسه الاشعة الساقطة وترجع الى هذه المسئلة المسئلة التى يعلم فيها منحنى جميع الاشعة الساقطة عمودية عليه واذا اعتبرنا الشعاع الساقط العمودى على المنحنى المعكس بجدته توجد معادلة (٨) هكذا

$$\frac{1}{\text{نق}_1} + \frac{1}{\text{نق}'_1} = \frac{2}{\text{نق}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (١٦)$$

وبذلك



نقطة مماسه بالاوّل من هـذين المنحنيين ونقطة سقوطه كاحدى نقط الدائرة الالتصاقيـة للمنحنى الثانى بمعنى أن القوانين المتنشئة لاجل الدائرة ولاجل الاشـعة الساقطة من نقطة واحدة لاتزال موجودة ايضا بابدال نصف قطر الدائرة بنصف قطر الانحنا فى نقطـة السقوط للمنحنى الذى هى الدائرة الالتصاقية له و بابدال بعد نقطة السقوط عن النقطة الشعاعية ببعد نقطة السقوط هذه عن نقطة تماس الشعاع الآتى اليها بالمنحنى المحيط بجميع الاشعة الساقطة و بغاية الضبط ينتقل من قضـية التحرك فى الدائرة فى علـم الميكانيكا الى قضية التحرك بطول منحن ما بالوجه المشروح عينه

انتهى

المهندسون الاولون الذين اشتغلوا بقضـية الكوستيكات لم يصيبوا فى ظنهم حيث تخيـل لهم امكان ابدال المنحنى المعكس او الفاصـل بالمماس له فى نقطة السقوط وانما تبين مطابقة قوانين لاسير بقوانين بوتيت جواز ابدال هذا المنحنى بدائرته الالتصاقيـة فى نقطة السقوط

